14. Übung Analysis III

(Satz von Stokes)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei $c \in C_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ geschlossen. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Re}\left(\int_c \frac{dz}{z}\right) = 0$.

2. Aufgabe

Sei $\omega = xy\,dx \wedge dy + 2x\,dy \wedge dz + 2y\,dx \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

a) Zeigen Sie, dass ω exakt ist.
b) Bestimmen Sie ein Potential von ω.
c) Zeigen Sie, dass das Integral von ω über die obere Halbkugel

$$A = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\,\} \subset S^2$$

Null ist.

3. Aufgabe

a) Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kreis. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $p \in K$ gilt

$$\int_{\partial K} (z-p)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und $K_{\frac{R}{2}}(p)$ der Kreis vom Radius $\frac{R}{2}$ um p. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{f^{(n)}(p)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\frac{R}{2}}(p)} (z-p)^{-n-1} f(z) dz.$$

Mit Hausaufgabe 3) ergibt sich, dass man die Ableitungen einer holomorphen Funktion durch obige Kurvenintegrale ausrechnen kann.

c) Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom auf $\mathbb{C}$, $K \subset \mathbb{C}$ ein Kreis auf dessen Rand keine Nullstellen von p liegen. Dann gilt

$$\#\{\text{Nullstellen von } p \text{ in } K\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

Hausaufgaben

Alle Punkte dieses Blatts sind Zusatzpunkte.

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $E \in C_1(\mathbb{C})$ die Standardparametrisierung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = x + iy$.

a) Berechnen Sie das Integral $\int_E \frac{dz}{z}$ (Hinweis: Stokes).

b) Finden Sie mit a) den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein C^∞–Weg.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \operatorname{Im}\left(\int_a^t \frac{\dot\gamma(\tau)}{\gamma(\tau)} d\tau\right)$$

eine C^∞–Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass es ein $\varphi_0 \in [0, 2\pi[$ gibt, sodass

$$e^{i(\varphi(t)+\varphi_0)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass der Quotient aus rechter und linker Seite konstant ist.) Veranschaulichen Sie dieses Ergebnis in einer Skizze.

c) Sei γ geschlossen. Zeigen Sie mit b), dass die Umlaufzahl

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

eine ganze Zahl ist.

d) Zeigen Sie, dass es einen vom Nullpunkt ausgehenden Strahl $S_0 \subset \mathbb{C}$ gibt, der *nicht* Tangente von γ ist (Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Sard auf φ an.)

e) Sei γ geschlossen und $S \in \mathbb{C}$ ein vom Nullpunkt ausgehender Strahl, der nicht Tangente von γ ist. Zeigen Sie, dass die Umlaufzahl $n(\gamma, 0)$ die „Anzahl" der Schnittpunkte von γ mit S ist, wenn man Schnittpunkte in denen γ von rechts nach links durchläuft positiv und die anderen negativ zählt.

f) Zeigen Sie, dass a)–e) für beliebige 1–Ketten $\gamma \in C_1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ gilt.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass man holomorphe Funktionen lokal in Potenzreihen entwickeln kann: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, $p \in G$ und $\epsilon > 0$, sodass $U_\epsilon(p) \subset G$, dann gibt es eine Folge (a_k) in $\mathbb{C}$, sodass für alle $z \in U_\epsilon(p)$ gilt $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k (z-p)^k$.

(Hinweis: Sei $K \subset \mathbb{C}$ — z.B. $K = \overline{U_\epsilon(p)}$ — ein Kreis, $z \in \partial K$, $z_0, p \in \mathring{K}$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{z-z_0} = (z-p) \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{z_0-p}{z-p}\right)^k$.)

Gesamtpunktzahl: 20