**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** WS 02/03
**Fakultät II - Institut für Mathematik**
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

# 10. Übungsblatt Elementargeometrie
**(Spiegelungen, Maßverhältnisse im Dreieck)**

---

Ausgabe: 6.1.03 Abgabe: 16.1.03 (vor der Übung)

---

Der Test findet am Donnerstag, den 13.2.2003, von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr im Raum MA 001 statt.

---

Für alle Aufgaben dieses Übungsblattes sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene Inzidenzgeometrie, für die alle bereits in der Vorlesung eingeführten Axiome gelten sollen mit Ausnahme des Streckungsaxioms.

**1. Hausaufgabe.** (*5 Punkte*)
Zeigt folgende Behauptungen:

a) In jedem echten Dreieck ist jede Seite länger als der Betrag der Differenz der Längen der beiden anderen Seiten.
Hinweis: Verwendet einen Satz aus der Vorlesung.

b) In jedem gleichschenkligen Dreieck mit Eckpunkten $A, B, C \in \mathcal{E}$ und den Seitenlängen $d(A, B) = d(A, C)$ ist die Mittelsenkrechte $m$ auf die Seite $[BC]$ eine Winkelhalbierende.

**2. Hausaufgabe.** (*5 Punkte*)
Löst das sogenannte **Heron'sche Lichtstrahl-Problem**:

Seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei verschiedene Punkte, die in derselben Halbebene $H$ zu einer Geraden $g \in \mathcal{G}$ liegen. Ein Lichtstrahl wird von $A$ nach $B$ gesendet, wobei er an der gegebenen Geraden $g$ "gespiegelt" wird. Findet den kürzesten Weg für den Lichtstrahl.

a) Fertigt eine geeignete Skizze an, in die auch die Größen der folgenden Aufgabenteile eingetragen werden.

b) Bestimmt den Punkt $C \in g$, für den die Weglänge $s = d(A, C) + d(C, B)$ minimal wird. Zeigt dann mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung, dass für jeden Punkt $C' \in g \setminus \{C\}$ gilt: $s < d(A, C') + d(C', B)$.
Hinweis: Spiegelt den Punkt $B$ an der Geraden $g$ und bestimmt damit den Verlauf des Lichtstrahls.

c) Sei $\Omega_A$ das Winkelfeld in $H$, das als Schenkel $[CA\rangle$ und eine Halbgerade von $g$ besitzt und $B$ nicht enthält und sei $\Omega_B$ das Winkelfeld in $H$, das als Schenkel $[CB\rangle$ und eine Halbgerade von $g$ besitzt und $A$ nicht enthält. Zeigt, dass dann gilt: $\omega(\Omega_A) = \omega(\Omega_B)$, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

**1. Übungsaufgabe.**
In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass Streckungen in der hyperbolischen Ebene keine Ähnlichkeitsabbildungen sind.

Dafür betrachten wir als ebene Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das **Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene**, in der $\mathcal{E}$ die Punktmenge des Inneren eines Kreises mit Mittelpunkt $M$ ist und die Menge der Geraden $\mathcal{G}$ durch die Menge aller offenen Sehnen des Kreises gegeben ist. Wir definieren eine Streckung $\sigma_Z : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit Zentrum $Z$ und Streckfaktor $k > 0$ als Abbildung, die den Punkt $P \in \mathcal{E}$ auf den Bildpunkt $\sigma_Z(P) \in [ZP\rangle$ mit $d(Z, \sigma_Z(P)) = k \cdot d(Z, P)$ abbildet. Als Beispiel wählen wir den Mittelpunkt $M$ als Zentrum $Z$ der Streckung. Betrachtet dann eine beliebige Gerade $g \in \mathcal{G}$, die nicht durch das Zentrum $Z$ verläuft, und zeigt, dass $\sigma_Z(g)$ keine Gerade ist.

**2. Übungsaufgabe.**
In dieser Aufgaben sollen einige Eigenschaften des Teilverhältnisses untersucht werden. Sei dafür $g \in \mathcal{G}$ eine beliebige orientierte Gerade. Seien $P, Q, T \in g$ drei beliebige Punkte. Das **Teilverhältnis** dieser drei Punkte ist die Größe $TV(P, Q, T) = \frac{\chi(P)-\chi(T)}{\chi(T)-\chi(Q)}$.

a) Zunächst soll gezeigt werden, dass die Definition des Teilverhältnisses unabhängig von der Wahl der Koordinatenabbildung ist. Seien dafür $O, \tilde{O} \in g$ zwei verschiedene Punkte. Wir nehmen oBdA $O < \tilde{O}$ an. Es bezeichne $\chi : g \to \mathbb{R}$ bzw. $\tilde{\chi} : g \to \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung mit Ursprung $O$ bzw. $\tilde{O}$. Zeigt, dass dann für alle $P \in g$ gilt: $\tilde{\chi}(P) = \chi(P) - \chi(\tilde{O})$. Folgert daraus die Behauptung.

b) Zeigt die folgenden Eigenschaften des Teilverhältnisses: $TV(P, Q, T) = \frac{d(P,T)}{d(Q,T)} \geq 0$, falls $T \in [PQ]$, und $TV(P, Q, T) = -\frac{d(P,T)}{d(Q,T)} < 0$ sonst; $P = T \;\Leftrightarrow\; TV(P, Q, T) = 0$ und $Q = T \;\Leftrightarrow\; TV(P, Q, T) = \infty$.

**3. Übungsaufgabe (Zusatz).**
In dieser Aufgabe soll der **Satz vom Außenwinkel** bewiesen werden.

Seien dazu $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei nicht kollineare Punkte und $D \in \langle AB\rangle$ mit $A \in [DB] \setminus \{D\}$. Wir bezeichnen die Winkel wie folgt: $\alpha = \omega(\angle BAC)$, $\beta = \omega(\angle ABC)$, $\gamma = \omega(\angle BCA)$ und $\hat{\alpha} = \omega(\angle DAC) = \pi - \alpha$. Das Ziel ist $\hat{\alpha} > \beta$ und $\hat{\alpha} > \gamma$ zu zeigen.

a) Sei $M$ der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$, sei $l_1$ das Lot auf die Gerade $\langle AB\rangle$ durch $M$ und sei $h$ das Lot durch $C$ auf $l_1$. Es bezeichne $\sigma_{l_1}$ die Spiegelung an der Geraden $l_1$. Zeichnet in eine Skizze die Punkte $A, D, C$ und die Bildpunkte $A' = \sigma_{l_1}(A)$, $C' = \sigma_{l_1}(C)$ und $D' = \sigma_{l_1}(D)$ ein und begründet, warum $\sigma_{l_1}(\langle AB\rangle) = \langle AB\rangle$, $\sigma_{l_1}(h) = h$ gilt sowie $d(M, A') = d(M, A) = d(M, C) = d(M, C')$ und $\hat{\alpha} = \omega(\angle D'A'C')$. Sei $S = \langle\langle AB\rangle l_1\rangle$ und $R = \langle l_1 h\rangle$. Begründet, warum $\omega(\angle AMS) = \omega(\angle SMA') = \omega(\angle C'MR)$ gilt.

b) Sei $l_2$ das Lot auf $l_1$ durch $M$ und bezeichne $\sigma_{l_2}$ die Spiegelung an der Geraden $l_2$. Begründet, warum $\sigma_{l_2}(l_1) = l_1$ und $\sigma_{l_2}(C') = A$ sowie $\sigma_{l_2}(A') = C$ gilt. Damit ist $\sigma_{l_2}(\langle AB\rangle) = h$ und $\sigma_{l_2}(\angle MA'D') = \angle MC\sigma_{l_2}(D')$. Folgert daraus, dass $\gamma < \omega(MC\sigma_{l_2}(D')) = \hat{\alpha}$ gelten muß.

c) Sei $F \in \langle AC\rangle$ mit $A \in [FC] \setminus F$. Zeigt, dass $\hat{\alpha} = \omega(\angle FAB)$ und folgert mit Hilfe von Teil b), dass $\beta < \hat{\alpha}$. Begründet, warum damit in jedem Dreieck $\alpha + \beta < \pi$ ist.

**4. Übungsaufgabe (Zusatz).**
In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass in jedem Dreieck die Winkelsumme kleiner oder gleich $\pi$ ist. Dies gilt insbesondere auch in der hyperbolischen Ebene.

Seien also $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei beliebige nicht kollineare Punkte. Wir bezeichnen die Winkel wie folgt: $\alpha = \omega(\angle BAC)$, $\beta = \omega(\angle ABC)$ und $\gamma = \omega(\angle BCA)$ und nehmen oBdA an, dass $\beta \leq \gamma$ gilt (sonst vertauschen wir die Bezeichnungen der Punkte $B$ und $C$). Sei $D \in [BC]$ der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$ und sei $E \in \langle AD\rangle$ so gewählt, dass $d(D, E) = d(A, D)$ und $D \in [AE]$. Es bezeichnen $\alpha' = \omega(\angle BAD)$, $\beta' = \omega(\angle ABE)$ und $\gamma' = \omega(\angle BEA)$ die Winkel im Dreieck $\{A, E, B\}$.

a) Fertigt eine geeignete Skizze an.
Zeigt, dass die Dreiecke $\{B, E, D\}$ und $\{A, D, C\}$ kongruent sind: Spiegelt dafür das Dreieck $\{B, E, D\}$ zunächst an der Geraden $\langle AE\rangle$ und notiert dabei, welche Winkel und Seitenlängen im gespiegelten Dreieck $\sigma_{\langle AE\rangle}(\{B, E, D\})$ mit welchen Winkeln und Seitenlängen im ursprünglichen Dreieck $\{B, E, D\}$ übereinstimmen. Fällt dann das Lot $l$ auf die Gerade $\langle AE\rangle$ im Punkt $D$ und spiegelt das Dreieck $\sigma_{\langle AE\rangle}(\{B, E, D\})$ an der Geraden $l$. Begründet, warum man durch diese Spiegelung das Dreieck $\{A, D, C\}$ erhält.

b) Folgert aus Teil a), dass gilt: $\alpha' + \gamma' = \alpha$ und $\beta' = \beta + \gamma$. Damit hat das Dreieck $\{A, E, B\}$ dieselbe Winkelsumme wie das Dreieck $\{A, B, C\}$.

c) Zeigt mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung, dass aus $\beta \leq \gamma$ folgt $\alpha' \leq \gamma'$ und damit $\alpha' \leq \frac{\alpha}{2}$.

d) Wir haben also aus dem gegebenen Dreieck $\{A, B, C\}$ ein Dreieck mit derselben Winkelsumme konstruiert, in dem ein Winkel $\leq \frac{\alpha}{2}$ ist. Durch iterative Anwendung dieser Konstruktion kann man erreichen, dass ein Winkel $\leq \frac{\alpha}{2^r}$ ist für jedes $r \in \mathbb{N}$. Für ein geeignetes $r$ ist $\frac{\alpha}{2^r}$ kleiner als ein gegebenes $\varepsilon > 0$, wobei die Winkelsumme in den neu konstruierten Dreiecken unverändert bleibt.
Nun nehmen wir für einen Widerspruchsbeweis an, dass die Winkelsumme gleich $\pi + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ ist. Dann können wir mit obiger Methode ein Dreieck konstruieren, bei den ein Winkel $\alpha^* \leq \varepsilon$ ist und dessen Winkelsumme $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = \pi + \varepsilon$ ist. Damit muss für dieses Dreieck $\beta^* + \gamma^* > \pi$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zum Satz vom Außenwinkel aus der vorhergehenden Übungsaufgabe.