TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

13. Übungsblatt Elementargeometrie
(Ähnlichkeitsabbildungen, Winkel im Dreieck)

Ausgabe: 27.1.03 Abgabe: 6.2.03 (vor der Übung)

Der Test findet am Donnerstag, den 13.2.2003, von 12.00 Uhr bis 14.00 Uhr im Raum MA 001 statt und wird 110 Minuten dauern. Bitte bringt einen **Lichtbildausweis** mit.

Wir wünschen alles Gute und viel Glück für den Test.

Für alle Aufgaben dieses Übungsblattes sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine ebene euklidische Geometrie.

1. Hausaufgabe. (*3 Punkte*)
Sei $\{A, B, C\}$ ein echtes gleichseitiges Dreieck mit $d(C, A) = d(C, B)$. Seien H_A, H_B und H_C die Fußpunkte der Höhen im Dreieck und sei H der Schnittpunkt der Höhen. Wir nehmen an, dass H im Inneren des Dreiecks liegt. Zeigt, dass die Dreiecke $\{A, H_C, H\}$ und $\{C, H_B, H\}$ ähnlich sind. Folgert daraus, dass $d(A, H_C) \cdot d(H, H_B) = d(C, H_B) \cdot d(H, H_C)$ gilt.

2. Hausaufgabe. (*4 Punkte*)
In dieser Aufgabe soll die folgende Konstruktion des Archimedes zur Winkeldreiteilung betrachtet werden:

Sei $\Omega = \angle g_1 h_1$ ein beliebiges Winkelfeld mit der Trägergeraden g (d.h. der Strahl $g_1 \subset g$ ist Teil der Geraden g). Um den Scheitel S des Winkelfeldes Ω schlage man einen Halbkreis k mit beliebigem Radius $r > 0$. Dabei sei $\{P\} = k \cap h_1$ und $\{Q\} = k \cap g_1$. Nun trage man auf der Kante eines Lineals zwei Punkte A und B mit $d(A, B) = r$ ab und verschiebe dieses Lineal in eine solche Lage, dass die Kante durch den Punkt P geht und gleichzeitig B auf dem Halbkreis k und A auf der Geraden g zu liegen kommt. Nun zieht man eine gerade Linie von A nach P.

a) Fertigt eine geeignete Skizze an.
b) Zeigt, dass für die Winkelmaß e $\alpha = \omega(\angle PSQ)$ und $\beta = \omega(\angle SAB)$ gilt: $\beta = \frac{\alpha}{3}$.

Anleitung: Verwendet Aussagen über die Winkelsumme in einem Dreieck und Winkel in gleichschenkligen Dreiecken.

3. Hausaufgabe. (*3 Punkte*)
Macht Euch noch einmal – zum Abschluss der Vorlesung Elementargeometrie –

Gedanken (in schriftlicher Form) zu folgenden Aufgaben:

a) Formuliert, warum (oder warum nicht) Schüler Geometrie lernen sollten und was sie in Geometrie lernen sollten.

b) Formuliert eine Erklärung für einen fiktiven Schüler, warum er Geometrie lernen sollte und was an der Geometrie wichtig für ihn sein könnte.

c) Stellt Euch vor, dass Ihr am Anfang einer Unterrichtseinheit Geometrie steht, und formuliert einen Einstieg/eine Motivation für eine fiktive Lerngruppe.

1. Übungsaufgabe.
Sei $O \in \mathcal{E}$ ein fester Punkt. Sei $P \in \mathcal{E}$ ein beliebiger Punkt mit $P \neq O$ und sei τ_P die Translation mit $\tau_P(O) = P$. Sei α_k die Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor $k \neq 0$. Sei $\tau_{\alpha_k(P)}$ die Translation mit $\tau_{\alpha_k(P)}(O) = \alpha_k(P)$ und $\tau_{\alpha_{k+1}(P)}$ die Translation mit $\tau_{\alpha_{k+1}(P)}(O) = \alpha_{k+1}(P)$. Zeigt, dass dann gilt:

$$\tau_P \circ \tau_{\alpha_k(P)} = \tau_{\alpha_{k+1}(P)}$$

für $k \neq -1$. Für $k = -1$ ist $\tau_P \circ \tau_{\alpha_k(P)} = id$.

Anleitung: Betrachtet zunächst die Gerade $a = \langle OP \rangle$. Wir nehmen oBdA $O <_a P$ an. Schreibt die Translation mit Hilfe von Spiegelungen und begründet, warum für alle Punkte $Q \in k$ dann $Q <_a \tau_P(Q)$ sowie $d(Q, \tau_P(Q)) = d(O, P)$ gilt.
Bestimmt damit $\tau_P \circ \tau_{\alpha_k(P)}(O)$.

2. Übungsaufgabe (Zusatz).
Seien $\{A, B, C\}$ und $\{A', B', C'\}$ zwei echte Dreiecke mit $d(B, C) = d(B', C')$. Seien M_B und M_C bzw. $M_{B'}$ und $M_{C'}$ die Mittelpunkte der Seiten $[AC]$ und $[AB]$ bzw. $[A'C']$ und $[A'B']$ sowie H_B und H_C bzw. $H_{B'}$ und $H_{C'}$ die Fuß punkte der Höhen auf den Geradem $\langle AC \rangle$ und $\langle AB \rangle$ bzw. $\langle A'C' \rangle$ und $\langle A'B' \rangle$. Zusätzlich gelte eine der beiden folgenden Voraussetzungen:

(i) $d(B, M_B) = d(B', M_{B'})$ und $d(C, M_C) = d(C', M_{C'})$,

(ii) $d(B, H_B) = d(B', H_{B'})$ und $d(C, H_C) = d(C', H_{C'})$.

Zeigt, dass unter jeder der beiden zusätzlichen Voraussetzungen (i) bzw. (ii) jeweils die Kongruenz der beiden Dreiecke folgt.

3. Übungsaufgabe (Zusatz).
Seien $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ bijektive Abbildungen. Vereinfacht den folgenden Ausdruck soweit wie möglich

$$(\beta \circ (\alpha \circ (\beta \circ \gamma))^{-1} \circ \alpha)^{-1} \circ (\sigma^{-1} \circ \tau)^{-1}.$$

Hinweis: Begründet zunächst, warum $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$ ist.