TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 02/03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Udo Hertrich-Jeromin
Ulrike Scheerer

2. Übungsblatt Elementargeometrie

(Inzidenzgeometrie, Streckenmaß, Metrik)

Ausgabe: 28.10.02 Abgabe: 7.11.02 (vor der Übung)

---

1. Hausaufgabe. (*6 Punkte*)
In dieser Aufgabe wird eine **affine Ebene** betrachtet, das heiß t eine Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$, in der die Inzidenzaxiome (I), (II), (III) und zusätzlich das Parallelenaxiom (Z) gelten:

(Z) Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und zu jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$ mit $P \notin g$ existiert genau eine Gerade $h \in \mathcal{G}$ mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.

Beweist folgende Aussagen für eine affine Ebene:

a) Das Axiom (Z) ist unabhängig von den Inzidenzaxiomen (I) bis (III). (D.h. gebt ein Beispiel einer ebenen Geometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ an, in der die Axiome (I) bis (III) gelten, Axiom (Z) aber nicht erfüllt ist.)

b) Das Axiom (I) folgt aus den Axiomen (II), (III) und (Z).
Verwendet dabei die Axiome (III) und (II) und betrachtet die Fälle $g = \emptyset$ und $g = \{Q\}$ für ein $Q \in \mathcal{E}$. Folgert daraus in jedem Fall einen Widerspruch zu Axiom (Z). (Skizzen können hilfreich sein.)

c) Die Relation $||$ zwischen Geraden ist transitiv, d.h. es gilt für alle Geraden $g, h, k \in \mathcal{G}$:
$$g||h \ \wedge h||k \ \Rightarrow \ g||k.$$
Unterscheidet dabei die Fälle (i) $g = h \vee h = k$ und (ii) $g \neq h \wedge h \neq k$.

1. Übungsaufgabe.
Wir betrachten als Beispiel einer ebenen Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das **Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene**, in der $\mathcal{E}$ die Punktmenge des Inneren eines Kreises mit Mittelpunkt M ist und die Menge der Geraden $\mathcal{G}$ durch die Menge aller offenen Sehnen des Kreises gegeben ist.

Zeigt, dass für $A, B \in \mathcal{E}$ durch
$$d(A,B) := \left| \log \left(\frac{|[AU]|}{|[BU]|} : \frac{|[AV]|}{|[BV]|} \right) \right|$$
eine Streckenmaß funktion auf $\mathcal{E}$ gegeben ist. Dabei bezeichnet $|[XY]|$ die euklidische Länge der Strecke $[XY]$. Verwendet zum Nachweis, dass die euklidische Länge eine Streckenmaßfunktion der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist, sowie die Eigenschaften des Logarithmus.

Was ist $\lim_{A \to U} d(A, B)$?

Wie sehen die Teilmengen $\mathcal{K}_c$ von $\mathcal{E}$ aus, die durch $\mathcal{K}_c = \{X \in \mathcal{E} \mid d(M, X) = c\}$ für $c > 0$ definiert werden?

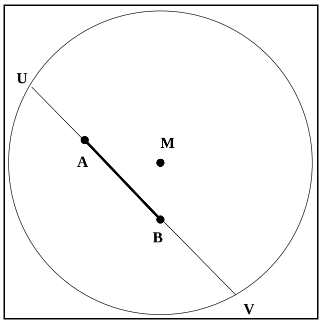

Fig. 1. Kleinsches Modell der hyperbolischen Ebene

2. Übungsaufgabe.
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzgeometrie, in der neben den Axiomen (I) bis (III) auch das Anordnungsaxiom (IV) und das Streckenmaß axiom (V) gelten. Seien P, Q, R, S vier kollineare Punkte. Beweist die folgenden Aussagen:

a) $R \in [PQ] \;\Rightarrow\; [PQ] = [PR] \cup [RQ]$ und $[PR] \cap [RQ] = \{R\}$.

b) Es gilt: $P \in [QR] \;\vee\; Q \in [PR] \;\vee\; R \in [PQ]$.

c) $[PQ\rangle = [RS\rangle \;\Rightarrow\; P = R$.

3. Übungsaufgabe.
Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigt, dass durch $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ mit

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf $\mathcal{M}$ definiert. Diese Metrik heiß t die **diskrete Metrik**.

Beweist auß erdem, dass für jede Metrik $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ und für alle Punkte $P, Q \in \mathcal{M}$ gilt: $d(P, Q) \geq 0$.

2. Hausaufgabe. *(4 Punkte)*
Zeigt, dass durch $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $d(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ gegeben ist. ($|\cdot|$ bezeichnet die Betragsfunktion für reelle Zahlen; $\vec{a} = (a_1, a_2)$ bezeichnet Vektoren im $\mathbb{R}^2$.)

Wie sehen die Mengen $\mathcal{K}_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\vec{0}, \vec{x}) = c\}$ für $c > 0$ für diese Metrik aus? Fertigt eine Skizze an.

4. Übungsaufgabe (Zusatz).
Beweist, dass die drei Axiome einer Metrik unabhängig sind. Wählt dafür als

Menge $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ die reellen Zahlen und findet Funktionen $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, die jeweils zwei der Axiome erfüllen und wo das dritte nicht gilt.

5. Übungsaufgabe (Zusatz).
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzgeometrie.

In dieser Aufgabe geht es um den Zusammenhang zwischen dem Streckenmaß und einer Metrik auf einer Geraden. Sei dafür eine Gerade $g \in \mathcal{G}$ fest gewählt.

a) Wir nehmen an, dass Axiom (V) erfüllt ist, dass also eine Streckenmaßfunktion $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_0^+$ existiert. Gibt es dann eine Metrik auf der Geraden g? (D.h. gibt es eine Funktion $D : g \times g \to \mathbb{R}$, die die Eigenschaften einer Metrik erfüllt?) Verwendet die Aussage der 2. Übungsaufgabe b).

b) Wir nehmen nun an, dass die Ebene mit einer Metrik $D : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ausgestattet ist. Gibt es dann (d.h. für jede solche Metrik) eine Funktion, die die Eigenschaften der Streckenmaß funktion für die Punkte auf g erfüllt? (Betrachtet das Beispiel aus der 3. Übungsaufgabe.)