

Inhaltsverzeichnis

1	Direkte und Inverse Probleme	3
1.1	Motivation und Beispiele	3
1.2	Mathematische Grundlagen	7
1.3	Operatoren und Aufgabenstellungen	9
2	Das Phänomen der Inkorrektheit	13
2.1	Hadamardsche Korrektheitsdefinition	13
2.2	Korrektheit von Extremalproblemen	19
2.3	Korrektheit bei linearen Operatorgleichungen	22
2.4	Lokale Inkorrektheit	32
2.5	Was nützen Zusatzinformationen ?	38
2.5.1	Objektive und subjektive Apriori-Informationen	39
2.5.2	Der Satz von Tichonov	42
2.5.3	Kompakte Mengen in Funktionenräumen	47
3	Identifikationsprobleme im Hilbertraum	55
3.1	Lineare Operatorgleichungen im Hilbertraum	55

3.1.1	Grundbegriffe der Hilbertraumtheorie	56
3.1.2	Eigenschaften beschränkter Operatoren im Hilbertraum	58
3.1.3	Korrektheitsdefinition von Nashed	59
3.1.4	Moore-Penrose-Inverse, Stabilität, Beispiele	60
3.1.5	Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren	71
3.1.6	Der Grad der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen	79
3.2	Nichtlineare Operatorgleichungen	91
3.2.1	Einige weitere Begriffe zu nichtlinearen Operatoren . .	91
3.2.2	Hinreichende Bedingungen für lokale Inkorrektheit und lokale Korrektheit	93
3.2.3	Der lokale Grad der Inkorrektheit	97
4	Regularisierungsmethoden	103
4.1	Lineare Operatorgleichungen	105
4.1.1	Ein allgemeines Regularisierungsschema	105
4.1.2	Die Tichonov-Regularisierung	110
4.1.3	Alternative Regularisierungsmethoden	125
4.1.4	Regularisierung durch endlichdimensionale Approxima- tion	130
4.1.5	Probleme in $L^2(-\infty, \infty)$	133
4.1.6	Regularisierung bei der Interpretation periodischer Daten	140
4.2	Schlechtkonditionierte Gleichungssysteme	146
4.3	Nichtlineare Gleichungen	157

Kapitel 1

Direkte und Inverse Probleme

1.1 Motivation und Beispiele

Die Aufgabenstellungen, die Sie bisher in den verschiedenen mathematischen Vorlesungen kennengelernt haben waren in der Regel *direkte Probleme*: Gegeben ist ein System mathematischer Gleichungen, die aus einer naturwissenschaftlichen Aufgabenstellung abgeleitet sind. Nehmen wir als Beispiel eine Evolutionsgleichung. Bekannt ist die Konfiguration des Problems und die Ausgangssituation. Das Ziel besteht in einer Simulation des Verlaufs dieses Prozesses. Allgemein zeichnen sich direkte Probleme dadurch aus, dass man aus bekannten Ursachen die unbekanntenen Wirkungen ermittelt.

Direktes Problem Ursache \Rightarrow Wirkung

Bei *inversen Problemstellungen* steht die Aufgabe in der anderen Richtung. Gegeben sind Meßwerte oder Beobachtungen der Wirkungen. Gesucht ist die Ursache (oder besser meist ein Teil der Ursachen), die zu diesen Beobachtungen führen. Diese Aufgabenstellung tritt in Praxis sehr häufig auf. Nahezu jede Bestimmung von Materialeigenschaften oder Prozessgrößen generiert inverse Probleme. Die gesuchten Größen lassen sich meist nicht direkt messen.

Also werden Größen gemessen, die durch diese Materialparameter beeinflusst werden. Anschließend wird aus den gemessenen Größen die gesuchten Eigenschaften bestimmt.

Darüber hinaus führen viele andere Anwendungen auf inverse Aufgabenstellungen, das reicht von der Lagerstättenbestimmung in der Geologie über die Computertomografie bis hin zur Bildrekonstruktion. Vereinfacht kann man ein inverses Problem daher wie folgt darstellen.

Inverses Problem
Wirkung \Rightarrow Ursache

Diese inverse Form der Aufgabenstellung beinhaltet auch mathematisch völlig neue Probleme. Die gemessenen Daten beinhalten in der Regel Messfehler. Außerdem wirken sich Vereinfachungen in der Modellierung aus. Daher stellt sich die Frage, ob eine solche Aufgabe überhaupt eine Lösung besitzt. Andererseits ist nicht klar, ob die Messdaten ausreichen, um die gesuchten Materialdaten zu bestimmen. Wichtiger als die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ist jedoch ein dritter Aspekt. *Inverse Probleme sind meist durch instabiles Verhalten der Lösung gekennzeichnet.* Das heißt: Beliebige kleine Fehler bei den Messungen können beliebig große Fehler in den Lösungen bewirken.

Genau darin liegt die Herausforderung der Theorie der inversen Probleme. Sie beschäftigt sich mit den mathematischen Ursachen dieser Probleme und bietet Möglichkeiten an, praktische Probleme stabil zu lösen. Wir beginnen mit einem Beispiel, das mathematisch gesehen das einfachste inverse Problem ist.

Beispiel 1.1 (Numerische Differentiation)

Gesucht wird die Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 . Bekannt sind lediglich die Funktionswerte. Wir können die Ableitung ermitteln mittels Differenzenquotient

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ersetzt wird der Grenzwert durch die Wahl eines geeigneten Punktes x . Was aber ist ein geeigneter Punkt x ? Die Berechnung der Funktionswerte wird lediglich mit einem kleinen numerischen Fehler δ erfolgen können. Wir erhalten daher

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0) + \delta}{x - x_0} = f'(\xi) + \frac{\delta}{x - x_0},$$

wobei der Punkt ξ nach dem Mittelwertsatz zwischen x und x_0 liegt. Nehmen wir an, dass unsere Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist. Dann erhalten wir wieder nach dem Mittelwertsatz die Abschätzung

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0) + \delta}{x - x_0} \right| \leq |f''(\eta)| \cdot |x - x_0| + \frac{\delta}{|x - x_0|}.$$

Die zwei Terme auf der rechten Seite stehen für typische Effekte bei inversen Problemen. Der erste Term stellt den Approximationsfehler dar. Dieser wird um so kleiner, je kleiner der Wert von $|x - x_0|$. Der zweite Term erzeugt Stabilitätsprobleme. Für kleiner werdende Differenz $|x - x_0|$ wächst dieser Fehler immer schneller. Für große Differenzen ist er dagegen fast Null. Eine gute Wahl von x stellt damit immer einen vernünftigen Kompromiss zwischen *Approximation* und *Stabilität* dar. Außerdem ist die Kenntnis des *Fehlerniveaus* δ wichtig.

Übungsaufgabe 1.1 Berechnen Sie den optimalen Wert von $|x - x_0|$. Wie ändert sich die Aussage bei der Verwendung von zentralen Differenzen (f sei dreimal stetig differenzierbar).

Übungsaufgabe 1.2 Überzeugen Sie sich, dass dieses Problem bei der numerischen Integration nicht auftritt.

Das zweite Beispiel ist wesentlich komplizierter. Es soll verdeutlichen, wie inverse Probleme in der Praxis auftreten.

Beispiel 1.2 Wir betrachten einen radialsymmetrischen Ofen, in dessen Mitte sich ein radialsymmetrischer Stab befindet. Die Wärmeausbreitung in Richtung des Stabes wird vernachlässigt. Das Temperaturverhalten wird durch eine *quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* beschrieben

$$\rho c(u) \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R, \quad 0 < t \leq T,$$

welche die Parameter bzw. Parameterfunktionen ϱ (Dichte), $c(u)$ (spezifische Wärme als Funktion der Temperatur) und $\lambda(u)$ (Wärmeleitfähigkeit als Funktion der Temperatur) enthält. Außerdem benötigt man eine Anfangsbedingung

$$u(r, 0) = u_0(r)$$

und Randbedingungen zur vollständigen Beschreibung des Problems. Aufgrund der Radialsymmetrie gilt

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial r} = 0 \quad 0 < t \leq T.$$

Für den Wärmeaustausch am äußeren Rand verwenden wir

$$\lambda(u) \frac{\partial u(R, t)}{\partial r} = \mu(u)(\psi(t) - u(R, t)) \quad 0 < t \leq T,$$

wobei ψ die Temperatur der umgebenden Luft ist und $\mu(u)$ die Wärmeübergangsfunktion als Funktion der Temperatur. Typischerweise beschäftigt sich nun die Mathematik mit der Lösung der direkten Aufgabe. Das heißt, alle Materialparameter sind bekannt und das *Temperaturfeld* $u(r, t)$ wird als Funktion von Radius und Zeit gesucht. Die Differentialgleichung, Anfangs- und Randbedingungen erfassen hier Ursache und das Bedingungsgefüge vollständig. Als spezielle Wirkungen kann man die Temperatur an bestimmten Ortspunkten

$$u(r_i, t) \quad i = 1..k, \quad 0 < t \leq T$$

betrachten. Anhand dieser Konstellation lassen sich verschiedene inverse Aufgabenstellungen ableiten. Eine praktisch relevante Frage ist die Identifikation der Wärmeübergangsfunktion $\mu(u)$ aus Messwerten in den einzelnen Ortspunkten.

Eine andere inverse Aufgabe ist die Bestimmung des Anfangstemperaturprofils $u_0(x)$ aus dem Kenntnis des Temperaturfeldes zum Endzeitpunkt T . Beide Probleme sind sogenannte Identifikationsprobleme.

In dieselbe Aufgabenstellung fallen aber auch Optimalsteueraufgaben, wie zum Beispiel die Frage nach der optimalen Gastemperatur $\psi(t)$, um ein gewünschtes Endtemperaturprofil zu erzeugen.

Bevor wir nun in die mathematische Welt eintauchen, sei noch die folgende Modellierungsaufgabe gestellt.

Übungsaufgabe 1.3 Wir wollen mit Hilfe von Gravitationsmessungen Lagerstätten erkunden. Dafür nehmen wir in einem Ballon Gravitationsmessungen vor. Wir nehmen die Erdoberfläche als eben an und messen die Gravitationskraft vom Ballon aus. Der Ballon befinde sich in Höhe h . Der Betrag der Anziehungskraft zweier Massen ergibt sich zu

$$|F| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wobei r den Abstand dieser zwei Massen bezeichnet. Das Gravimeter befinde sich im Punkt (s_1, s_2, h) und das Masseelement im Punkt $(t_1, t_2, 0)$. Außerdem mißt das Gravimeter nicht nur den Betrag der Kraft sondern auch deren Richtung. Uns interessiert nur die z -Komponente der Kraft. Wir gehen nun von dem Modell eines Massepunktes zu einer Masseverteilung über. Diese habe die Dichtefunktion $f(t_1, t_2)$ in einem Gebiet Ω . Stellen Sie eine Formel für die z -Komponente der Kraft $|F_z(s)| = y(s_1, s_2)$ auf, die nur bekannte Größen und die Dichtefunktion $f(t_1, t_2)$ enthält. Die Bestimmung der Dichtefunktion aus der Kenntnis der Funktion $|F_z(s)|$ ist wieder eine inverse Aufgabenstellung.

1.2 Mathematische Grundlagen

Grundlage unserer Betrachtungen bilden reelle normierte Räume Z . Das sind spezielle lineare Räume über den Körper der reellen Zahlen, bei dem jedes Element z des Raumes Z eine nichtnegative Zahl $\|z\|_Z$ als Norm des Elementes zugeordnet wird. Dabei gelten die Normaxiome

$$\|z\|_Z = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{und} \quad \|\lambda z\|_Z = |\lambda| \|z\|_Z \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$\|z_1 + z_2\|_Z \leq \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z$$

für alle $z, z_1, z_2 \in Z$.

Mit Hilfe dieser Norm erklärt man den Begriff der starken Konvergenz (Normkonvergenz):

$$z_n \rightarrow z \Leftrightarrow \|z_n - z\|_Z \rightarrow 0.$$

In vielen Fällen benötigt man den Begriff der Cauchyfolge, d.h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so dass

$$\|z_n - z_m\|_Z \leq \varepsilon, \quad \text{falls } m, n > n_0.$$

Jede konvergente Folge in einem normierten Raum ist Cauchyfolge. Konvergieren umgekehrt alle Cauchyfolgen, so sprechen wir davon, dass der Raum Z vollständig ist. Ein vollständiger normierter Raum wird Banachraum genannt.

Im weiteren werden wir Abbildungen zwischen zwei normierten Räumen X und Y betrachten. Diese werden bei uns immer mindestens Banachräume sein. Existiert im Banachraum X ein Skalarprodukt mit

$$(x, x)_X = \|x\|_X^2 \quad \forall x \in X$$

so bezeichnet man X als Hilbertraum. In den meisten Fällen werden die betrachteten Funktionenräume Hilberträume sein. Wichtig ist bei einigen Untersuchungen der Fakt, dass die Einheitskugel in unendlich dimensionalen Räumen nicht kompakt ist.

Für den Moment werden wir mit den Räumen $C[a, b]$ und $L^2(a, b)$ auskommen. Der Raum der stetigen Funktionen $C[a, b]$ ist versehen mit der Norm

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

ein Banachraum. Im Raum L^2 der quadratisch integrierbaren Funktionen definiert man ein Skalarprodukt und eine Norm

$$\|x\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b x^2(s) ds.$$

Damit ist dieser Raum ein Hilbertraum. Man beachte, dass die L^2 -Norm für jedes Element aus C die L^2 -Norm definiert ist. Allerdings ist die Menge der stetigen Funktionen bezüglich dieser Norm unvollständig.

Manchmal wird es notwendig sein verschiedene Normen $\|z\|_Z$ und $\|z\|_{\tilde{Z}}$ in einem Raum Z zu betrachten. Gilt dabei

$$c_1 \|z\|_Z \leq \|z\|_{\tilde{Z}} \leq c_2 \|z\|_Z$$

mit $0 < c_1 < c_2 < \infty$, so sprechen wir von äquivalenten Normen. In endlich-dimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent.

Im unendlichdimensionalen Raum Z kann es dagegen passieren, dass nur eine Ungleichung gilt

$$\|z\|_{\tilde{Z}} \leq c \|z\|_Z.$$

In diesem Fall nennt man $\|z\|_Z$ die stärkere Norm.

Beispiel 1.3 Wir betrachten die Menge der stetigen Funktionen und setzen

$$\|z\|_Z = \|z\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |z(t)|$$

und

$$\|z\|_{\tilde{Z}} = \|z\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b z^2(s) ds \right)^{1/2}.$$

Dann gilt

$$\left(\int_a^b z^2(s) ds \right)^{1/2} \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} |z(t)| \int_a^b 1 ds \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \max_{a \leq t \leq b} |z(t)|.$$

Umgekehrt kann man Folgen finden, in denen die C -Norm der Folgeglieder konstant 1 ist, während die L^2 -Norm gegen Null strebt. Deshalb gilt nur eine Ungleichung und die C -Norm ist stärker als die L^2 -Norm.

Die geeignete Wahl der Räume X und Y für die Untersuchung von inversen Problemen ist häufig eine Schlüsselstelle und erfordert eine gute Kenntnis des technisch-physikalischen Hintergrundes.

1.3 Operatoren und Aufgabenstellungen

Neben der Raumwahl spielt bei der Formulierung inverser Aufgaben auch die Wahl des Definitionsbereichs $D \subset X$ eine wesentliche Rolle. Alle Elemente x dieser Menge kommen als Lösungen des inversen Problems in Frage. Natürlich darf die Menge D nur Elemente enthalten, für die die zugehörige direkte Aufgabe überhaupt lösbar ist.

Die direkte Aufgabe $x \mapsto y$ wird durch den Operator $F : X \supset D \rightarrow Y$ charakterisiert

$$y = F(x).$$

Dabei kann es durchaus sein, dass sich die Bildelemente nicht mit einer expliziten Formel darstellen lassen. Man denke hier nur an das Beispiel 1.2. Für den Operator F werden wir immer die Stetigkeit voraussetzen.

Definition: Ein Operator $F : X \supset D \rightarrow Y$ heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in D$, wenn für jede gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_n\} \subset D$ von Urbildern, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_X = 0,$$

auch die zugehörige Bildfolge $\{F(x_n)\} \subset Y$ gegen $F(x_0)$ konvergiert, d.h., es gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - F(x_0)\|_Y = 0.$$

Der Operator heißt stetig auf D , wenn er in allen Punkten $x_0 \in D$ stetig ist.

Eine besondere Rolle werden lineare Operatoren bei unseren Betrachtungen spielen.

Definition: Ein Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt *linear*, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2$$

gilt. Gibt es zusätzlich eine Konstante $K \geq 0$, so dass für alle $x \in X$

$$\|Ax\|_Y \leq K\|x\|_X$$

erfüllt ist, so heißt der lineare Operator A *beschränkt*. Es ist eine bekannte Tatsache der Funktionalanalysis, dass für lineare Operatoren die Begriffe Beschränktheit und Stetigkeit äquivalent sind.

Beschränkte lineare Operatoren A zwischen X und Y bilden selbst einen Banachraum, den wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnen. Die Norm

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

in diesem Raum entspricht der kleinstmöglichen Konstante in der vorigen Definition. Häufig werden wir aber auch *nichtlineare Operatoren* F betrachten.

Alle im Abschnitt 1.1 vorgestellten Identifikationsprobleme lassen sich in Form der *Operatorgleichung*

$$F(x) = y, \quad x \in D \subset X, \quad y \in Y \quad (1.1)$$

schreiben. In der *inversen Aufgabenstellung* stellen die Werte y die Eingangsdaten der Operatorgleichung dar. Das gesuchte Element x aus dem Definitionsbereich D charakterisiert die Lösung dieser Gleichung. Sofern F ein nichtlinearer Operator ist, liegt ein nichtlineares Identifikationsproblem vor und entsprechend ergibt sich eine nichtlineare Operatorgleichung (2.1).

Lineare Identifikationsprobleme können wir in der Form

$$Ax = y, \quad x \in D \subset X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (1.2)$$

schreiben. Die Darstellung der Identifikationsprobleme ist in gewissem Sinne idealisiert, da die Eingangsdaten y exakten Bildern $F(x) = y$ bzw. $Ax = y$ des gesuchten Parameters entsprechen. In der Realität werden diese Daten durch Beobachtungsfehler, Modellfehler, ... von den exakten abweichen. Wir werden deswegen von gestörten Daten y_δ ausgehen und dann immer die Abschätzung

$$\|y - y_\delta\|_Y \leq \delta \quad (1.3)$$

bei Vorgabe eines Datenfehlerniveaus zugrundelegen.

Für Optimalsteueraufgaben ist diese Modellierung auf der Grundlage von Operatorgleichungen wenig sachgerecht. Die vorgegebenen gewünschten Bilder y werden nur in den seltensten Fällen exakte Bilder von F sein. Das Fehlerniveau δ spielt bei diesen Aufgaben auch keine Rolle. Die Optimalsteueraufgaben formuliert man als Extremalproblem

$$J(x) = \|F(x) - y\|_Y = \min!, \quad x \in D \subset X. \quad (1.4)$$

In diesem allgemeinen Kontext muss es zunächst kein minimierendes Element geben. Aufgrund der Nichtnegativität der Norm gibt es aber immer eine Infimalfolge, d.h. es gibt zu jedem $\eta > 0$ ein Element x_η mit

$$J(x_\eta) \leq \inf_{x \in D} J(x) + \eta. \quad (1.5)$$

Für beide Aufgabenklassen kann man die Sondersituation $D = X$ hervorheben. Wir haben es in diesem Fall mit *unrestringierten Problemen* zu tun. Speziell für Identifikationsprobleme ist dieser sehr wichtig, da hierfür eine geschlossene mathematische Theorie existiert. Ist der Definitionsbereich eine echte Teilmenge des Banachraums X so sprechen wir von *restringierten inversen Problemen*.

Wir listen hier einige in Praxis häufig verwendete Mengen auf. Mit Hilfe von Kugeln

$$D = \{x \in X : \|x\|_X \leq K\}$$

ist es möglich, Lösungen inverser Aufgaben in der Norm des Raumes X durch eine Konstante K zu beschränken.

Ebenso können Lösungsfunktionen entsprechend ihrem Anwendungshintergrund a-priori als *nichtnegativ*, z.B.

$$D = \{x \in C[a, b] : x(t) \geq 0 \forall t \in [a, b]\},$$

als *monoton nichtfallend*, z.B.

$$D = \{x \in C[a, b] : x(t_1) \leq x(t_2) \ (a \leq t_1 < t_2 \leq b)\},$$

oder als *konvex*, z.B.

$$D = \{x \in C[a, b] : x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2} \ (a \leq t_1 < t_2 \leq b)\},$$

vorausgesetzt werden. Eine weitere wichtige Klasse von Beschränkungen werden wir später in der Vorlesung kennenlernen.

Restriktionen haben zwei prinzipielle Auswirkungen auf die praktische Behandlung inverser Probleme. Die analytische und numerische Behandlung restringierter Aufgaben ist häufig komplizierter, da die Methoden an die Restriktionen angepasst werden müssen. Andererseits steigen mit den Restriktionen die Chancen auf realistische Lösungen inverser Aufgaben beträchtlich, da gegenüber nichtrestringierten Aufgaben zusätzliche Information über die erwartete Lösung in die Problemstellung einfließen.

Kapitel 2

Das Phänomen der Inkorrektheit

Wichtige positive Eigenschaften direkter Aufgaben sind nicht auf inverse Probleme übertragbar. Bei direkten Aufgaben ziehen kleine Änderungen der Ursachen auch kleine Änderungen der Wirkungen nach sich. Umgekehrt gilt dieser Schluss nicht. Die nachteiligen Eigenschaften inverser Probleme finden schon in der Wortwahl ihren Ausdruck. Man spricht von schlecht gestellten oder inkorrekten Aufgaben und auch der englische Begriff *ill-posedness* zielt in die gleiche Richtung. Dabei liegen die Ursachen für diese Eigenschaften in den Problemen selbst und sind nicht etwa auf schlechte Modellierung zurückzuführen.

2.1 Hadamardsche Korrektheitsdefinition

Bereits Anfang dieses Jahrhunderts formulierte der französische Mathematiker J. Hadamard bei Betrachtungen von Cauchyproblemen zu partiellen Differentialgleichungen den Begriff *Korrektheit* einer Aufgabe. Wir werden diese Definition sinngemäß auf unsere Operatorgleichung (1.1) anwenden.

Definition: Die Operatorgleichung (1.1) heißt *korrekt* nach Hadamard, wenn gilt:

- (i) Zu jedem $y \in Y$ gibt es eine Lösung $x \in D$ von $F(x) = y$ (Existenzbedingung).
- (ii) Die aus $F(x) = y$ gewonnene Lösung ist in D eindeutig bestimmt. (Eindeutigkeitsbedingung)
- (iii) Die Lösung x hängt stetig von der rechten Seite y ab (Stabilitätsbedingung).

Ist wenigstens eine der drei Bedingungen verletzt, so heißt die Operatorgleichung *inkorrekt* nach Hadamard.

Schauen wir uns der Reihe nach die drei Bedingungen an. Erfüllt der Operator F der direkten Aufgabe die Existenzbedingung, so nennen wir ihn *surjektiv*. Die Bildmenge

$$F(D) = \{y \in Y : y = F(x), x \in D\}$$

füllt dann den ganzen Raum Y aus. Ist dagegen die Existenzbedingung verletzt, so kann es sein, dass zwar für exakte rechte Seite $y \in F(D)$ eine Lösung der Operatorgleichung existiert, nicht jedoch für gestörte Eingangsdaten, d.h. $y_\delta \notin F(D)$. Die Verletzung der Existenzbedingung ist ein erstes Phänomen der Inkorrektheit.

Dieses Problem kann aber dadurch überwunden werden, dass man verallgemeinerte Lösungen der Operatorgleichung zulässt. Anstatt der Gleichung (1.1) betrachtet man die Minimierung der Defektnorm $\|F(x) - y\|_Y$ bzw. in Hilberträumen meist das Quadrat davon $\|F(x) - y\|_Y^2$. Im Fall des n -dimensionalen Vektorraums und der Verwendung der Euklidischen Norm entspricht dies genau der auf C.F.Gauß zurückgehenden Methode der kleinsten Quadrate. Üblicherweise spricht man aber auch im Fall des Raumes $L^2(a, b)$ von Kleinste-Quadrate-Lösungen.

Kommen wir nun zur Eindeutigkeitsbedingung. Wir nennen dann den Operator F *injektiv* auf dem Definitionsbereich D . In diesem Fall existiert der inverse Operator

$$F^{-1} : Y \supset F(D) \rightarrow D \subset X$$

mit $F^{-1}(z) = x$ falls $F(x) = z$. Die Lösung des Identifikationsproblems kann man dann in expliziter Weise

$$x = F^{-1}(y) \tag{2.1}$$

aus den Eingangsdaten y herleiten. Gilt neben der Eindeutigkeitsbedingung auch noch die Existenzbedingung, so ist der Umkehroperator F^{-1} auf dem ganzen Raum Y definiert.

Bei Verletzung der Eindeutigkeitsbedingung ist selbst bei exakter rechter Seite y keine eindeutige Identifikation möglich. Die beobachteten Wirkungen enthalten zu wenig Informationen über das zu identifizierende Objekt. Mehrdeutigkeit ist ein zweites Phänomen der Inkorrektheit.

Bei der praktischen Lösung von mehrdeutigen Operatorgleichungen macht es häufig Sinn, sogenannte Minimum-Norm-Lösungen zu betrachten.

Definition: Ein Element x_{mn} heißt x^* -Minimum-Norm-Lösung der Operatorgleichung (1.1) zu einer gegebenen rechten Seite $y \in Y$ und einem gegebenen Referenzelement $x^* \in X$, wenn gilt

$$\|F(x_{mn}) - y\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$$

und

$$\|x_{mn} - x^*\| = \min\{\|\tilde{x} - x^*\| : \|F(\tilde{x}) - y\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y, \tilde{x} \in D\}.$$

Wird $x^* = 0$ gesetzt, so wird das normkleinste Element gesucht unter den Elementen, die die Defektnorm minimieren. Man spricht dann nur von *Minimum-Norm-Lösungen*.

Bei erfüllter Eindeutigkeitsbedingung bedeutet in der Hadamardschen Korrektheitsdefinition die Stabilitätsbedingung, dass aus der Konvergenz $y_n \rightarrow y_0$ in Y die Konvergenz der Bilder des inversen Operators $F^{-1}(y_n) \rightarrow F^{-1}(y_0)$ in X folgt. Die Stabilitätsbedingung ist in diesem Falle gleichwertig mit der Stetigkeit des inversen Operators. Leider wird bei Identifikationsproblemen selbst bei Erfülltheit von Existenz- und Eindeutigkeitsbedingung die Stabilitätsbedingung in der Regel verletzt. Die Banachräume X und Y sind in solchen Fällen unendlichdimensionale Funktionenräume, wie etwa die Räume $C[a, b]$ und $L^2(a, b)$. Die Tatsache, dass dann F^{-1} *unstetig* wird und beliebig kleine Störungen in y zu beliebig großen Änderungen in x führen können, erschwert die Lösung von Identifikationsproblemen außerordentlich. Instabilität ist als drittes Phänomen der Inkorrektheit für den Lösungsprozess das gravierendste.

Wird die Eindeutigkeitsbedingung nicht befriedigt, so wollen wir unter der Erfüllung der Stabilitätsbedingung verstehen, dass zu einer in Y gegen y_0 konvergenten Folge $\{y_n\}$ die zugehörige Folge der Urbildmengen

$$U(y_n) := \{x \in D : F(x) = y_n\} \quad n = 1, 2, \dots$$

von Elementen $x \in D$ gegen die Urbildmenge

$$U(y_0) := \{x \in D : F(x) = y_0\} \quad n = 1, 2, \dots$$

konvergiert. Die Konvergenz ist dabei im Sinne der Konvergenz des Quasiabstandes gegen Null wie folgt zu verstehen:

$$qdist(U(y_n), U(y_0)) := \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Die Störungen in der Lösungen werden mit Hilfe des nichtsymmetrischen Quasiabstandes bewertet. Das Infimum stellt dabei den Abstand eines speziellen Punktes zur Menge $U(y_0)$ dar. Anschliessend wird der größte dieser Abstände ermittelt.

Die Inkorrektheit als gravierendste Komponente der Inkorrektheit kann überwunden werden, wenn anstelle der instabilen Aufgaben *stabile Ersatzaufgaben* gelöst werden. Diese Ersatzaufgaben müssen das Ausgangsproblem möglichst gut approximieren. Wichtig ist dabei ein gesunder Kompromiss zwischen *Stabilität* und *Approximation*. Diese Vorgehensweise wird bei inversen Problemen *Regularisierung* genannt und entsprechende Methoden werden als *Regularisierungsmethoden* bezeichnet.

Die häufigste Ursache für Instabilität ist die Glättungseigenschaft der Operatoren F . Die Bilder sind dann viel glatter (regulärer) als die Urbilder. So werden unstetige Funktionen in stetige überführt oder stetige in differenzierbare. Es kann aber auch bedeuten, dass aus stark oszillierenden Kurven kaum schwankende Funktionen erzeugt werden. Die Umkehroperation muss natürlich genau das Gegenteil leisten, d.h. aufrauhend sein. Das bedeutet, dass man aus einer kaum schwankenden Kurve eine stark oszillierende ermitteln muss. Oder machen wir das folgende Gedankenexperiment. Auf einer rauhen Straße fährt eine Dampfwalze. Sicherlich ist es das weit weniger schwierige Problem, das Ergebnis des Walzens zu berechnen, als aus dem Profil der geglätteten Straße das Ausgangsprofil zu ermitteln. Das folgende Beispiel illustriert den Zusammenhang.

Beispiel 2.1 Für einen auf gerader Straße fahrenden PKW wird im Zeitraum $0 \leq t \leq T$ mittels eines Meßgerätes die Geschwindigkeit $y(t)$ als Funktion der Zeit t aufgezeichnet. Daraus soll die der Geschwindigkeit zugrunde liegende Beschleunigung

$$x(t) = y'(t)$$

des Wagens identifiziert werden. Wir haben es also mit dem einfachen inversen Problem der Ermittlung der Ableitung zu tun. Geht man davon aus, dass der Wagen zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist, dann ergibt sich als Zusammenhang die Integralgleichung

$$(F(x))(t) := \int_0^t x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.3)$$

welche hier die konkrete Form der Operatorgleichung (1.1) darstellt. Der Operator F der direkten Aufgaben ist ein "glättender" Integraloperator (genauer ein Volterrascher Integraloperator). Dagegen ist der Operator F^{-1} der inversen Aufgabe mit $x = F^{-1}(y) = \frac{d}{dt}y$ ein "aufrauhender" Differentialoperator.

Wir betrachten nun den Operator F im Raum der stetigen Funktionen, d.h. wir messen alle Abweichungen in der Maximumnorm. Dann ist F ein stetiger Operator, da die Abschätzung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (x_n(\tau) - x_0(\tau)) d\tau \right| \leq T \|x_n - x_0\|_{C[0,T]}$$

gilt. Nun stören wir die Lösung x_0 durch einen hochfrequenten Anteil

$$x_n(t) = x_0(t) + \cos nt \quad (0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots).$$

Es gilt

$$\|x_n - x_0\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |\cos nt| = 1.$$

Für die zugehörigen y -Werte ergibt sich

$$y_n = y_0(t) + \frac{1}{n} \sin nt \quad (0 \leq t \leq T, \quad n = 1, 2, \dots)$$

und somit

$$\|y_n - y_0\|_{C[0,T]} \leq \frac{1}{n}.$$

Folglich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\|_{C[0,T]} = 0, \text{ aber } \lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{-1}(y_n) - F^{-1}(y_0)\|_{C[0,T]} = 1 \neq 0.$$

Der Differentialoperator F^{-1} ist somit in $C[0, T]$ unstetig. Die Operatorgleichung verletzt die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition und ist somit inkorrekt. Vergleicht man die Formeln für x und y so sieht man recht deutlich den glättenden bzw. aufrauenden Charakter der Operatoren F bzw. F^{-1} .

Für die Überprüfung, ob ein Problem korrekt oder inkorrekt ist, müssen alle Bestandteile der Operatorgleichung (also X , Y , D und F) herangezogen werden. Manchmal lässt sich die eindeutige Lösbarkeit erreichen, indem man den Definitionsbereich D geeignet einschränkt, so dass aus mehreren Lösungszweigen eine spezielle Lösung ausgewählt wird. Für die Stabilitätsbedingung spielt die Wahl der Räume X und Y eine wesentliche Rolle. Wählt man im Beispiel 2.1 $X = C[0, T]$ und $Y = C^1[0, T]$, so gilt stets

$$\begin{aligned} \|F(x_n) - F(x_0)\|_{C^1[0,T]} &= \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (x_n(\tau) - x_0(\tau)) d\tau \right| + \max_{0 \leq t \leq T} |x_n(t) - x_0(t)| \\ &\geq \|x_n - x_0\|_{C[0,T]}, \end{aligned}$$

was die Stabilität des inversen Problems sicherstellt. Der Lösungsoperator $F^{-1} : C^1[0, T] \rightarrow C[0, T]$ ist hier ein stetiger Operator. Stabilität oder Instabilität hängen also wesentlich von der Wahl der Funktionenräume ab. Eine Verstärkung der Norm in Y wie hier oder eine Abschwächung der Norm in X kann aus einer instabilen Aufgabe eine stabile machen. Dieser *mathematische Trick* ist aber *kaum von praktischer Bedeutung*, da für die mathematische Modellierung inverser Probleme die Normen im allgemeinen durch den praktischen Hintergrund festgelegt sind und daher nicht frei gewählt werden können. In unserem Beispiel 2.1 würde das bedeuten, dass außer der Geschwindigkeit auch noch deren Ableitung mit vorgegebener Genauigkeit δ gemessen werden müssen. Das wird aber ein Geschwindigkeitsmessgerät nicht leisten. Die Berechnung der Ableitung war ja gerade Gegenstand der Aufgabe. Die Wahl des Raumes Y wird bei inversen Problemen daher stark von der Art und Weise der Messungen beeinflusst.

2.2 Korrektheit von Extremalproblemen

Bei Extremalaufgaben wird das Problem nicht durch die Operatorgleichung (1.1) sondern durch die Minimierungsaufgabe (1.4) beschrieben. Deshalb ist der Korrektheitsbegriff auch nicht aus der Hadamardschen Definition zu erschließen. Am besten geht man von einem allgemeinen Extremalproblem

$$J(x) = \min ! \quad x \in D \subset X \quad (2.4)$$

aus. Die dazu passende Korrektheitsdefinition lautet:

Definition: Das Extremalproblem (2.4) heißt *korrekt*, wenn gilt:

(iv) Die Lösungsmenge

$$L_{\min} = \{x_{\min} \in D : J(x_{\min}) = \inf_{x \in D} J(x)\}$$

von Problem (2.4) ist nichtleer, wobei

$$\inf_{x \in D} J(x) > -\infty$$

vorausgesetzt wird. (Existenzbedingung)

(v) Für eine minimierende Folge $\{x_n\} \subset D$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = \inf_{x \in D} J(x)$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, L_{\min}) = 0,$$

wobei

$$\text{dist}(x_n, L_{\min}) = \inf_{x \in L_{\min}} \|x_n - x\|_X$$

einen Punkt-Menge-Abstand beschreibt. (Stabilitätsbedingung)

Ist eine Bedingung verletzt, so heißt das Extremalproblem inkorrekt.

Wir wollen zunächst eine Vorstellung von diesem Stabilitätsbegriff bekommen: Dazu wählen wir $D = X = \mathbb{R}$. Das Extremalproblem

$$J(x) = \frac{1}{1+x^2} = \min ! \quad x \in \mathbb{R}$$

verletzt zum Beispiel die Existenzbedingung. Zwar gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}} J(x) = 0 > -\infty$. Allerdings gibt es keinen Wert x , welcher dieses Infimum realisiert. Die Lösungsmenge ist also leer.

Betrachten wir nun noch das leicht modifizierte Problem

$$J(x) = \frac{x^2}{1+x^4} = \min ! \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hier ist die Existenzbedingung erfüllt, denn $x_{\min} = 0$ ist Lösung der Minimierungsaufgabe. Somit ist L_{\min} nicht leer. Jedoch bildet die Folge $x_n = n$ eine minimierende Folge, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = 0.$$

Es gilt aber

$$\text{dist}(x_n, L_{\min}) = n \rightarrow \infty.$$

Die Stabilitätsbedingung ist offenbar verletzt und so sind beide Extremalprobleme inkorrekt. Für ein Steuerproblem in der Formulierung (1.4) bedeutet die Existenzbedingung in der Korrektheitsdefinition, dass dann zu vorgegebenen $y \in Y$ Elemente $x_{\min} \in D$ mit minimalen Defekt $\|F(x) - y\|_Y$ existieren. Betrachtet man eine den Defekt minimierende Folge $\{x_n\} \subset D$, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y,$$

so sind die x_n bei erfüllter Stabilitätsbedingung für große n beliebig gute Näherungen für die Elemente x_{\min} mit minimalem Defekt. Derartige Folgen $\{x_n\}$ entstehen z.B. bei der unvollständigen Minimierung des Defekts, wenn für eine Folge positiver Zahlen $\{\eta_n\}$ mit $\eta_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ die Ungleichungen

$$\|F(x_n) - y\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y + \eta_n$$

erzeugt werden.

Die Forderung nach der Existenz eines eindeutig bestimmten Elementes x_{\min} mit minimalem Defekt findet man in der Definition nicht. Für Steueraufgaben ist es eher von Vorteil als von Nachteil, wenn mehrere Lösungen existieren. Wir gehen jetzt von der Erfülltheit von Existenz- und Stabilitätsbedingung für das Steuerproblem aus. Wie sieht es dann mit der Stabilität der Lösung

bezüglich Störungen aus ? Wir bezeichnen mit $\{y_n\} \subset Y$ eine Folge von Näherungselementen der exakten Eingangsdaten $y_0 \in Y$, für die

$$\|y_n - y_0\|_Y \leq \delta_n \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$$

und mit $\{x_n\} \in D$ eine durch unvollständige Minimierung von $\|F(x) - y_n\|_Y$ erhaltene Folge mit

$$\|F(x_n) - y_n\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\|F(x_n) - y_0\|_Y \leq \|F(x_n) - y_n\|_Y + \|y_n - y_0\|_Y$$

und damit

$$\|F(x_n) - y_0\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n + \delta_n = \|F(x_{\min}) - y_n\|_Y + \eta_n + \delta_n.$$

Darauf wenden wir noch einmal die Dreiecksungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \|F(x_n) - y_0\|_Y &\leq \|F(x_{\min}) - y_0\|_Y + \|y_n - y_0\|_Y + \eta_n + \delta_n \\ &\leq \|F(x_{\min}) - y_0\|_Y + \eta_n + 2\delta_n. \end{aligned}$$

Gehen wir in dieser Ungleichung zum Grenzwert über, so ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y_0\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y$$

Wegen des Infimums auf der rechten Seite muss offenbar sogar Gleichheit gelten. Also ist $\{x_n\}$ auch eine minimierende Folge für das Defektfunktional mit exakten Daten y_0 . Damit ist das Steuerproblem stabil bezüglich Fehler in den Daten im Sinne von (v) (Punkt-Menge-Abstand).

Die Nützlichkeit des Korrektheitsbegriffs für Extremalaufgaben geht aber über die Steueraufgaben hinaus. Häufig formuliert man Ersatzaufgaben zur näherungsweise Lösung von inkorrekten Operatorgleichungen in Form von Extremalaufgaben. Die Korrektheit dieser Ersatzaufgaben ist dann die Voraussetzung, um eine näherungsweise stabile Lösung der Ausgangsgleichung zu sichern.

2.3 Korrektheit und Inkorrekttheit bei linearen Operatorgleichungen in Banachräumen

Wir betrachten hier die *lineare Operatorgleichung*

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (2.5)$$

als mathematisches Modell eines unrestringierten linearen Identifikationsproblems. Der beschränkte lineare Operator A ist dabei auf dem gesamten Banachraum X definiert und nimmt Werte im Banachraum Y an. Wir wollen hier an dieser Stelle spezielle Teilmengen $T \subset X$ einführen, die in den weiteren Betrachtungen eine Rolle spielen werden. Wir nennen $T \subset X$ einen Teilraum von X , wenn T selbst wieder einen linearen Raum bildet. In diesem Raum wird die gleiche Norm wie in X eingeführt. Für die weitere Betrachtung sind die Begriffe offene und abgeschlossene Mengen von Bedeutung. Dabei ist eine Menge offen, wenn sie nur innere Punkte enthält. Ein innerer Punkt x_0 von T ist dadurch charakterisiert, dass es eine offene Kugel

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\|_X < r\}$$

gibt, die vollständig in T liegt. Eine abgeschlossene Menge enthält alle ihre Häufungspunkte.

Wir bezeichnen

$$N(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$$

als *Nullraum* des Operators A . Dieser enthält alle Elemente, die in das Nullelement abgebildet werden. Wegen der Stetigkeit von A ist der Nullraum von A immer abgeschlossen.

Weiter bezeichnen wir mit

$$R(A) = \{y \in Y : y = Ax, x \in X\}$$

den *Bildraum* des Operators A . Der Bildraum $R(A)$ ist wieder ein linearer Teilraum von A . Dieser muss aber nicht abgeschlossen sein! Die Frage nach der Abgeschlossenheit des Bildraums ist eng verknüpft mit der Frage nach der Korrektheit von (2.5).

Wenden wir nun die Korrektheitsdefinition auf (2.5) an. Dann ist die Existenzbedingung genau dann erfüllt, wenn A surjektiv ist, also $R(A) = Y$. Andererseits gilt die Eindeutigkeitsbedingung genau dann, wenn A injektiv ist, also wenn $N(A) = \{0\}$ gilt. Das folgt einfach aus der Linearität von A :
Würde

$$Ax_1 = Ax_2$$

gelten, so folgt $A(x_1 - x_2) = 0$. Besteht der Nullraum nur aus dem Nullelement folgt hier die Eindeutigkeit. Bei erfüllter Eindeutigkeitsbedingung existiert der inverse Operator

$$A^{-1} : Y \supset R(A) \rightarrow X$$

und dieser ist wieder ein linearer Operator. Zur Erfüllung der Stabilitätsbedingung muss der inverse Operator stetig, d.h. beschränkt sein, d.h. es muss eine Konstante K existieren mit

$$\|A^{-1}y\|_X \leq K\|y\|_Y \quad \text{für alle } y \in R(A)$$

oder anders geschrieben

$$\|x\|_X \leq K\|Ax\|_Y \quad \text{für alle } x \in X. \quad (2.6)$$

Interessant ist nun, dass in diesem Fall die Stabilitätsbedingung automatisch erfüllt ist, wenn Existenz- und Eindeutigkeitsbedingung erfüllt sind. Diesen Zusammenhang stellt das Open-Mapping-Theorem her.

Lemma 1 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein surjektiver beschränkter linearer Operator, der den Banachraum X auf den Banachraum Y abbildet, d.h. es gilt $R(A) = Y$. Dann ist für jede offene Teilmenge T von X auch die Bildmenge $AT = \{y \in Y : y = Ax, x \in T\}$ eine offene Menge in Y*

Da ein Operator genau dann stetig ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist, ergibt sich aus diesem Lemma eine wichtige Folgerung.

Folgerung 1 *Ist der lineare Operator A aus Lemma 1 zusätzlich injektiv, d.h. es gilt $N(A) = \{0\}$, dann gibt es einen linearen und beschränkten inversen Operator $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Wir setzen für die weiteren Betrachtungen in diesem Abschnitt voraus, dass der Operator A injektiv ist, d.h. die Eindeutigkeitsbedingung sei erfüllt. Zuerst betrachten wir den Fall

$$R(A) = \overline{R(A)}. \quad (2.7)$$

Als abgeschlossener Teilraum von Y ist der Bildraum $\tilde{Y} = R(A)$ selbst wieder ein Banachraum mit derselben Norm wie in Y . Der Operator $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, \tilde{Y})$ mit $\tilde{A}x = Ax$ für alle $x \in X$ ist dann surjektiv. Damit lassen sich sowohl Lemma 1 als auch Folgerung 1 anwenden. Der stetige inverse Operator $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{Y}, X)$ sichert die Erfüllung der Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Korrektheitsdefinition. Somit ergibt sich der Satz:

Theorem 1 *Der Operator A in der linearen Operatorgleichung (2.5) sei injektiv und habe einen abgeschlossenen Bildraum, d.h. es gelte (2.7). Dann ist die Stabilitätsbedingung in der Hadamardschen Korrektheitsdefinition erfüllt.*

Da Y als Banachraum abgeschlossen ist, folgt aus der Existenzbedingung die Abgeschlossenheit des Bildraumes (2.7). Daraus folgt:

Folgerung 2 *Genügt die lineare Operatorgleichung (2.5) sowohl der Existenz- als auch der Eindeutigkeitsbedingung, so genügt sie auch der Stabilitätsbedingung, und (2.5) ist korrekt nach Hadamard.*

Nun betrachten wir die alternative Situation, dass der Operator A keinen abgeschlossenen Bildraum besitzt

$$R(A) \neq \overline{R(A)}. \quad (2.8)$$

Dann ist der inverse Operator $A^{-1} : Y \supset R(A) \rightarrow X$ nicht beschränkt und damit nicht stetig. Somit ist die Stabilitätsbedingung für (2.5) verletzt. Wäre nämlich außer (2.8) auch eine Ungleichung (2.6) erfüllt, so müsste für eine Folge

$$y_n \rightarrow y_0 \notin R(A) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{mit } y_n = Ax_n \in R(A) \quad n = 1, 2, \dots$$

die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\|_X \leq K \|y_n - y_m\|_Y \quad n, m = 1, 2, \dots$$

gelten. Da $\{y_n\}$ als konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist erhalten wir, dass auch $\{x_n\}$ eine Cauchyfolge ist. Da X als Banachraum vollständig ist, existiert ein Grenzelement $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Wegen der Stetigkeit von A folgt daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax_0 = y_0$. Somit gilt $y_0 \in R(A)$ im Widerspruch zu unserer Annahme.

Theorem 2 *Der Operator A in der linearen Operatorgleichung (2.5) sei injektiv und habe keinen abgeschlossenen Bildraum, d.h. es gelte (2.8). Dann ist die Stabilitätsbedingung in der Hadamardschen Definition verletzt und das Problem ist somit inkorrekt nach Hadamard.*

Wir befassen uns nun mit typischen Beispielen, anhand derer stabile und instabile Situationen erläutert werden sollen.

Beispiel 2.2 Ein inverses Problem aus dem Bereich des Strahlenschutzes besteht in der Identifikation von Gammaspekten auf der Grundlage von gemessenen Impulsspektren. Dies dient der Berechnung Strahlendosis, welche ein Objekt in einer betrachteten Zeit trifft. Typisch für solche Aufgaben ist die Tatsache, dass das zu identifizierende Spektrum nicht direkt beobachtbar ist, jedoch Wirkungen davon relativ gut gemessen werden können. Man spricht dann von indirekten Messungen, deren mathematische Interpretation die Identifikation der gesuchten Größe ermöglichen soll.

Teilt man den interessierenden Energiebereich $[0, E_{max}]$ in n gleich große Intervalle $I_i = [\frac{i-1}{n} E_{max}, \frac{i}{n} E_{max}]$ ein ($i = 1..n$), so wird der Vektor x_i gesucht, dessen Komponenten x_i den in einer festgelegten Messzeit auf das Objekt treffenden Quantenfluss von Teilchen aus dem Energieintervall I_i charakterisieren. Mit Hilfe eines Detektors werden als Wirkungen elektrische Impulse y_j ($j = 1..n$) gemessen und zu einem Vektor y zusammengefasst. Der Vektor y (Impulsspektrum) kann als eine Verfälschung der Originalinform x (Photonenspektrum) aufgefasst werden, wobei sich die Verfälschungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

aus Standardspektren zusammensetzt. Das lineare Identifikationsproblem erhält als Spezialfall der Operatorgleichung (2.5) die Gestalt eines linearen

Gleichungssystems

$$Ax = y. \quad (2.9)$$

Wir wollen nun die Korrektheit dieses Problems untersuchen. Bekanntlich sind alle Normen im \mathbb{R}^n äquivalent. Es ist daher nicht nötig diese hier zu spezifizieren. Diese Tatsache stimmt aber nur, wenn n *fixiert* bleibt. Sind lineare Gleichungssysteme Resultat von Diskretisierungen, dann ist es schon wichtig, die *dem Problem entsprechenden Normen* zu verwenden.

Für unsere Diskussion benutzen wir die Tatsache, dass jeder *endlichdimensionale Teilraum abgeschlossen* ist. Folglich ist der Bildraum abgeschlossen und wir haben die zur Stabilität führende Situation (2.7). Gilt für die Determinante der Matrix A

$$\det A \neq 0, \quad (2.10)$$

dann liegt der Fall eines injektiven Operators mit trivialem Nullraum

$$N(A) = \{0\}$$

und ebenfalls regulärer Matrix A^{-1} vor. Für jede rechte Seite y gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung

$$x = A^{-1}y.$$

Aus Theorem 1 folgt also:

Folgerung 3 *Genügt das lineare Gleichungssystem (2.9) der Bedingung (2.10), d.h. $\det A \neq 0$, so ist es korrekt nach Hadamard.*

Auf dem ersten Blick bietet sich hier eine faszinierende Lösung an. Nach Diskretisierung wird aus jeder linearen Operatorgleichung ein lineares Gleichungssystem, bei dem Instabilitäten nicht auftreten können. Wir werden diesen Effekt später als Regularisierung durch Diskretisierung bezeichnen. Die Hoffnung ist jedoch trügerisch, wie man an einer quantitativen Stabilitätsanalyse sieht. Es sei y_δ eine Näherung für den Vektor y , dann gilt

$$\|x - x_\delta\| \leq \|A^{-1}\| \|y - y_\delta\|$$

für den absoluten Fehler der Lösung. Aus

$$\|y\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

folgt für $y \neq 0$ die Beziehung

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \|A\| \frac{1}{\|y\|}$$

und nach Multiplikation die Abschätzung

$$\frac{\|x - x_\delta\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|y - y_\delta\|}{\|y\|} = \text{cond}(A) \frac{\|y - y_\delta\|}{\|y\|}. \quad (2.11)$$

Die Konditionszahl $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$ gibt an, um welchen Faktor der relative Fehler der Lösung größer ist als der relative Fehler der Eingangsdaten. Bei hohen Konditionszahlen spricht man von *schlecht konditionierten* Gleichungssystemen. Die Grenze dafür hängt stark von der verwendeten Arithmetik ab. *Schlecht gestellte* unendlichdimensionale Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass die nach Diskretisierung entstehenden Gleichungssysteme schlecht konditioniert sind. Mit feiner werdender Diskretisierung wächst die Konditionszahl je nach Problem mehr oder weniger stark an. Man sollte deshalb *nie* solche Probleme mit feinen Diskretisierungen rechnen. Das trifft natürlich nicht zu, wenn man statt des schlecht gestellten Problems ein regularisiertes Ersatzproblem löst.

Im Falle schlechter Kondition ist zwar die Hadamardsche Korrektheitsdefinition erfüllt, die Lösung reagiert aber trotzdem äußerst sensibel auf Störungen in den Daten. Bei der Rekonstruktion des Photonenspektrums erhält man daher bei direkter Lösung des linearen Gleichungssystems stark oszillierende Lösungen. So werden für von vornherein positive Lösungskomponenten, wie hier die Photonenzahl, teilweise sehr große negative Werte angeboten. Solche Ergebnisse sind natürlich gänzlich unbrauchbar und werden bei physikalischen Interpretationen sofort verworfen. Deshalb setzt man auch zur Lösung von solchen Gleichungssystemen stabilisierende Verfahren ein (Regularisierungsmethoden).

Beispiel 2.3 Bei der Farbanalyse von Objektproben tritt als inverses Problem die Identifikation von Remissionskurven auf der Grundlage von Integralen über diesen Kurven auf. Die zu bestimmenden Remissionskurven $x(t)$, welche die Reflexionscharakteristiken beschreiben, stellen Materialfunktionen dar, die im Zusammenspiel mit dem Spektrum des verwendeten Lichts die Farbe der Probe ausmachen. Die Variable t kennzeichnet dabei die Wellenlänge in einem zum Bereich des sichtbaren Lichts gehörenden Spektralintervall $[a, b]$.

Als Messdaten kann man Photoströme $y(s)$ verwenden, die in Photodioden eines Sensors auftreten, wobei der Variablen s als Definitionsbereich ein Intervall $[c, d]$ zugeordnet wird. Jedem Wert aus diesem Intervall entspreche dabei eine spezielle Messsituation, die durch Wahl von Parametern der Lichtquellen und verwendeten Photodioden variiert werden kann. Der Zusammenhang lässt sich hier als lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art

$$\int_a^b k(s, t)x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.12)$$

mit einer reellwertigen Kernfunktion $k(s, t)$ beschreiben. Für festes s sollte die Kernfunktion aus den Parametern der jeweiligen Messsituation ableitbar sein. Häufig sind solche Apparatfunktionen näherungsweise vom Typ einer Glockenkurve. Je deutlicher sich der Verlauf der Kernfunktionen $k(s, \cdot)$ für verschiedene s unterscheidet, desto mehr Information über die gesuchte Funktion x enthalten die Daten y .

Für unsere Betrachtungen wählen wir $X = C[a, b]$ und $Y = L^2(c, d)$. Außerdem setzen wir

$$k(s, \cdot) \in L^1(a, b) \quad \text{für alle } s \in [c, d] \quad \text{und} \quad \int_a^b |k(\cdot, t)| \in L^2(c, d) \quad (2.13)$$

voraus.

Der Operator $A : C[a, b] \rightarrow L^2(c, d)$ der direkten Aufgabe ist ein *linearer Fredholmscher Integraloperator*. Er ist über die Beziehung

$$(Ax)(s) = \int_a^b k(s, t)x(t) dt \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.14)$$

definiert und bei Vorgabe einer Kernfunktion k , die den Bedingungen (2.13) genügt, ein beschränkter linearer Operator, denn es gilt

$$\|Ax\|_Y^2 \leq \int_c^d \left(\int_a^b |k(s, t)||x(t)| dt \right)^2 ds \leq \left(\int_c^d \left(\int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds \right) \|x\|_X^2$$

und wegen (2.13) ist die Größe $\int_c^d \left(\int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds$ endlich. Für die Operatornorm gilt daher die Abschätzung

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \sqrt{\int_c^d \left(\int_a^b |k(s, t)| dt \right)^2 ds}.$$

Wir betrachten solche Kernfunktionen, bei denen der Operator A injektiv wirkt und somit die Eindeutigkeitsbedingung erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung werden wir zeigen, dass die Integralgleichung erster Art niemals die Stabilitätsbedingung erfüllen kann und folglich inkorrekt nach Hadamard ist. In Kapitel 3 werden wir im Zusammenhang mit Moore-Penrose-Inversen A^\dagger sehen, dass auch im Fall nichtinjektiver Fredholmscher Integraloperatoren A die Stabilitätsbedingung verletzt ist. Die Instabilität ist dabei fundamental und nicht von der speziellen Gestalt des Kerns k abhängig. Sie beruht auf folgendem Lemma:

Lemma 2 Falls die auf dem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ definierte Funktion $k(s, t)$ (2.13) erfüllt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt = 0 \quad \text{für fast alle } s \in [c, d]$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \left(\int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt \right)^2 ds = 0.$$

Die erste Formel besagt, dass die Fourierkoeffizienten einer L^1 -Funktion gegen Null streben. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Riemann-Lebesgue-Lemma (siehe Natanson S.313). Die zweite Grenzwertbeziehung wird mit Hilfe des Majorantenkriterium von Lebesgue bewiesen.

Für eine Folge stetiger Funktionen

$$x_n(t) = x_0(t) + \sin nt \quad (a \leq t \leq b, \quad n = 1, 2, \dots)$$

gilt dann mit $y_n = Ax_n$, $y_0 = Ax_0$

$$\|x_n - x_0\|_X = 1, \quad \text{falls } n \geq \frac{\pi}{b-a},$$

aber

$$\|y_n - y_0\|_Y = \sqrt{\int_c^d \left(\int_a^b k(s, t) \sin nt \, dt \right)^2 ds} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

aufgrund von Lemma 2. Die Wirkungen der x_0 überlagernden sinusförmigen Störung mit variabler Frequenz n werden durch den Operator A in einer

Weise geglättet, dass die Wirkung der Störung gemessen in der L^2 -Norm beliebig klein wird. Der Operator $A^{-1} : L^2(c, d) \supset R(A) \rightarrow C[a, b]$ ist folglich unbeschränkt und damit unstetig. Diese Situation tritt immer ein, wenn der Operator A *kompakt* ist und das Bild unendlichdimensional.

Die Instabilität liegt im übrigen nicht an der verwendeten C -Norm. Man rechnet leicht nach, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\frac{b-a}{2}} \neq 0$$

gilt. Dies macht die Instabilität der Fredholmschen Integralgleichung auch im Raumpaar $X = L^2(a, b)$, $Y = L^2(c, d)$ deutlich.

Für die funktionalanalytischen Zusammenhänge wiederholen wir kurz einige Begriffe: Eine Teilmenge T im Banachraum X heißt *beschränkt*, wenn die Normen aller Elemente dieser Teilmenge durch eine Konstante gleichmäßig beschränkt sind. Eine Teilmenge S heißt *relativ kompakt*, wenn man aus jeder unendlichen Folge von Elementen aus S eine konvergente auswählen kann. Ist eine solche Menge zusätzlich abgeschlossen, dann heißt S kompakt.

Definition: Ein linearer Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt kompakt, wenn er jede beschränkte Teilmenge $T \subset X$ in eine relativ kompakte Menge $AT = \{y : y = Ax, x \in T\} \subset Y$ abbildet.

Theorem 3 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein linearer und kompakter Operator, der zwischen den unendlichdimensionalen Banachräumen X und Y wirkt. Dann ist der (unendlichdimensionale) Bildraum $R(A)$ des Operators A nicht abgeschlossen, d.h., es gilt (2.8). Folglich ist der zu A inverse Operator $A^{-1} : Y \supset R(A) \rightarrow X$ unbeschränkt.*

Diese Behauptung ist leicht nachzuweisen. Der Operator A bildet die Einheitskugel des Raumes X in eine relativ kompakte Menge ab. Stetige Operatoren bilden relativ kompakte Mengen in relativ kompakte Mengen ab. Wäre der inverse Operator stetig, dann müsste die Einheitskugel im Raum X relativ kompakt sein. Das ist aber bekanntermaßen nur dann der Fall, wenn der Raum X endlichdimensional ist. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung.

Aus dem Satz ergibt sich sofort ein weiteres Resultat:

Theorem 4 *Der Banachraum X in der linearen Operatorgleichung (2.5) sei unendlichdimensional. Weiter sei der zugehörige Operator A injektiv und kompakt. Dann ist die Stabilitätsbedingung verletzt und die Operatorgleichung (2.5) ist inkorrekt nach Hadamard.*

Wir können diese Erkenntnisse direkt auf den Fredholmschen Integraloperator anwenden. Dabei betrachten wir sowohl Räume stetiger Funktionen als auch Räume quadratisch integrierbarer Funktionen.

Lemma 3 *Der in Formel (2.14) definierte lineare Fredholmsche Integraloperator $A : X \rightarrow Y$ mit stetigem Kern $k \in C([c, d] \times [a, b])$ ist im Raumpaars $X = C[a, b]$ und $Y = C[c, d]$ kompakt. Der Operator ist ebenfalls kompakt, wenn man einen Kern $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$ voraussetzt und das Raumpaars $X = L^2(a, b)$, $Y = L^2(c, d)$ betrachtet.*

Damit ist klar, dass lineare Fredholmsche Integralgleichungen erster Art in Raumpaaren stetiger Funktionen und in Raumpaaren quadratisch integrierbarer Funktionen inkorrekt nach Hadamard sind. Sie erfordern daher Maßnahmen, um eine stabile näherungsweise Lösung dieser Gleichung zu sichern. Im Gegensatz dazu sind *lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art*

$$x(s) + \int_a^b k(s, t)x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.15)$$

(zur Theorie siehe Drabek/Kufner) als Operatorgleichungen der Form

$$x + Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ kompakt mit } \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < 1 \quad (2.16)$$

in diesen Räumen stets korrekt nach Hadamard. Bei derartigen Integralgleichungen existiert also für alle $y \in Y$ eine eindeutigbestimmte Lösung $x \in X$, welche stetig von der rechten Seite y abhängt. Leider führen praktisch auftretende inverse Probleme praktisch immer auf Integralgleichungen erster Art, so dass die Inkorrektheit für diese Klasse praktischer Aufgabenstellungen eine typische Eigenschaft ist.

2.4 Lokale Inkorrektheit bei nichtlinearen Operatorgleichungen

Hadamards klassische Definition der Korrektheit von Operatorgleichungen ist *globaler* Natur, d.h. es werden Bedingungen an den Operator F der direkten Aufgabe gestellt, die den gesamten Definitionsbereich D des Operators betreffen. Eine besondere Bedeutung besitzt diese Definition daher für die gerade behandelte Klasse von linearen unrestringierten Identifikationsaufgaben. Bei solchen Aufgaben sind lokale und globale Eigenschaften gleich, d.h. die Eigenschaft hängen nicht von einem speziell betrachteten Punkt ab. Das ändert sich natürlich, wenn man eine *nichtlineare Operatorgleichung*

$$F(x) = y, \quad x \in D \subset X, \quad y \in Y \quad (2.17)$$

in den Banachräumen X und Y betrachtet. Im allgemeinen ist hier die Lösbarkeit nur für speziell gestaltete rechte Seiten zu erwarten. Häufig treten, wie schon bei einer quadratischen Gleichung im Raum der reellen Zahlen, verschiedene Lösungswege auf, die eine globale Forderung nach eindeutiger Lösbarkeit auf dem gesamten Definitionsgebiet D wenig sinnvoll erscheinen lassen. Vielmehr bietet sich eine *lokale* Analyse des Verhaltens von (2.17) an, welche insbesondere der stabilen Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite y entsprechende Aufmerksamkeit schenkt. Zu diesem Zweck werden die Durchschnittsmengen

$$\bar{B}_r^D(x_0) = \{x \in D : \|x - x_0\|_X \leq r\} \quad (2.18)$$

definiert, wo der Definitionsbereich, mit einer (hinreichend kleinen) Umgebung um einen Lösungspunkt x_0 geschnitten wird. Dabei soll noch

$$F(x_0) = y_0, \quad x_0 \in D, \quad y_0 \in Y \quad (2.19)$$

gelten.

Definition: Die Operatorgleichung (2.17) heißt *lokal inkorrekt*, wenn für beliebig kleine Radien $r > 0$ jeweils eine nicht gegen x_0 konvergierende Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus der Kugel $\bar{B}_r^D(x_0)$ existiert, deren Bildfolge $\{F(x_n)\} \subset Y$ gegen $F(x_0)$ konvergiert, d.h. für diese Folgen gilt

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, \text{ aber } x_n \not\rightarrow x_0 \text{ in } X \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

Anderenfalls heißt die Gleichung *lokal korrekt*.

Was folgt nun aus lokaler Inkorrektheit bzw. Korrektheit? Bei lokaler Inkorrektheit können wir folgern, dass es zu jedem Radius r einen noch kleineren Radius \tilde{r} gibt, so dass der Ringbereich

$$\bar{B}_r^D(x_0) \setminus \bar{B}_{\tilde{r}}^D(x_0) = \{x \in D : 0 < \tilde{r} < \|x - x_0\|_X \leq r\}$$

eine unendliche Folge $\{x_n\}$ enthält mit der Konvergenzeigenschaft $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$.

Umgekehrt folgt aus der lokalen Korrektheit der nichtlinearen Operatorgleichung (2.17), dass ein fester Radius r_0 existieren muss, so dass für eine Folge $\{x_n\} \subset \bar{B}_{r_0}^D(x_0)$ die Konvergenz der Bildfolge $\{F(x_n)\}$ gegen $F(x_0)$ in Y auch die Konvergenz der Urbildfolge $\{x_n\}$ nach sich zieht, d.h. es gilt die Implikation

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in \bar{B}_{r_0}^D(x_0) \Rightarrow x_n \rightarrow x_0 \text{ in } X. \quad (2.21)$$

Eine *notwendige Bedingung* für die lokale Korrektheit von (2.17) ist daher, dass x_0 ein *isolierter Punkt* der Lösungsmenge

$$U(y_0) = \{x \in D : F(x) = y_0\}$$

ist und somit ein Kugelradius $r_0 > 0$ existiert mit

$$U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0) = \{x_0\}. \quad (2.22)$$

Die Bedingung (2.22) ist allerdings weit weniger stark als die Forderung nach der Injektivität des Operators F auf einer kleinen Kugel um x_0 , in (2.22) wird die lokale Eindeutigkeit der Lösung nur für die exakte rechte Seite y_0 gefordert.

Wir werden uns im weiteren davon überzeugen, dass die Bedingung (2.21) einer *lokalen Variante der Hadamardschen Stabilitätsbedingung* entspricht, die im Fall nichtinjektiver Operatoren F global in der Konvergenzbeziehung (2.2) zum Ausdruck kommt. Es sei (2.17) in x_0 lokal korrekt und beschreibe $\{y_n\} \subset Y$ mit $y_n \rightarrow y_0$ eine Folge von Näherungselementen der rechten Seite y_0 , deren Urbildmengen

$$U(y_n) = \{x \in D : F(x) = y_n\}$$

der Bedingung

$$U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0) \neq \emptyset$$

genügen. Dann existieren nichtnegative reelle Zahlen

$$f_n = \sup_{x_n \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \|x_n - x_0\|_X \leq r_0.$$

Wegen (2.22) gilt auch

$$f_n = \sup_{x_n \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \inf_{x \in U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)} \|x_n - x\|_X \leq r_0.$$

Für alle positiven n gibt es dann ein Element $x_n^* \in U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)$ mit

$$\|x_n^* - x_0\|_X \geq f_n - \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0\|_X \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Aus (2.21) folgt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^* - x_0\|_X = 0,$$

also muss auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$$

gelten. Die lokale Variante von (2.2) lautet also

$$y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow qdist(U(y_n) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0), U(y_0) \cap \bar{B}_{r_0}^D(x_0)) \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Diese Überlegungen lassen sich zusammen so formulieren:

Theorem 5 *Die zu einer rechten Seite y_0 gehörige Lösung $x_0 \in D \subset X$ einer in x_0 lokal korrekt gestellten Operatorgleichung (2.17) ist eine isolierte Lösung. Die Operatorgleichung ist darüber hinaus lokal stabil im Sinne von (2.23).*

Die lokale Inkorrektheit ist eine für die Lösungsrekonstruktion nachteilige Eigenschaft, die allerdings bei nichtlinearen Identifikationsproblemen häufig zu finden ist. Falls nämlich (2.17) in x_0 lokal inkorrekt ist, so gibt es keinen systematischen Zugang, um die tatsächliche Lösung x_0 beliebig genau

anzunähern, selbst wenn Daten y_n der rechten Seite y_0 mit beliebig kleinen Störungen zur Verfügung gestellt werden, d.h. wenn $y_n \rightarrow y_0$ gilt. Wir wollen exemplarisch einige Typen nichtlinearer Identifikationsprobleme vorstellen, die sich als lokal inkorrekt erweisen.

Beispiel 2.4 Ein fundamentales Prinzip der Kinetik chemischer Reaktionen ist die Tatsache, dass sich die Konzentrationsänderungen eines Stoffes zu allen betrachteten Zeiten $t \geq 0$ proportional zur aktuellen Konzentration $y(t)$ desselben vollziehen. Geht man von einer zeitlich variablen Änderungsrate $x(t)$ aus der Konzentration aus, so gilt die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = x(t)y(t) \quad (2.24)$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = c_0, \quad (2.25)$$

welche die Anfangskonzentration $c_0 > 0$ enthält. Die direkte Aufgabe besteht in der Bestimmung des zeitlichen Konzentrationsverlaufs $y(t)$ ($0 \leq t \leq T$), wenn der Anfangswert c_0 und die Parameterfunktion $x(t)$ gegeben sind. Der nichtlineare Operator F der direkten Aufgabe lässt sich dann in der Form

$$(F(x))(s) = c_0 \exp\left(\int_0^s x(t) dt\right) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (2.26)$$

darstellen. Die inverse Aufgabe besteht in der Identifikation der variablen Rate x auf der Grundlage von Konzentrationsmessungen $y(t)$.

Beispiel 2.5 Wir betrachten ein örtlich eindimensionales Wärmeleitproblem, bei welchem $x(t)$ einen zeitlich veränderlichen Wärmeleitkoeffizienten darstellt. Die partielle Differentialgleichung wird beschrieben durch

$$u_t = x(t)u_{\xi\xi} \quad (0 < \xi < 1, 0 < t \leq T), \quad (2.27)$$

wobei $u(\xi, t)$ die Temperatur darstellt. Die Anfangsbedingung sei gegeben durch

$$u(\xi, 0) = \sin \pi\xi. \quad (2.28)$$

Außerdem seien homogene Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.29)$$

vorgegeben. Beobachtbar sei die Temperatur im Mittelpunkt des Ortsintervalls

$$y(t) = u\left(\frac{1}{2}, t\right)$$

zu allen Zeitpunkten t . Für die Lösung der partiellen Differentialgleichung können wir in diesem speziellen Fall die Darstellung

$$u(\xi, t) = \sin \pi \xi \exp\left(-\pi^2 \int_0^t x(\eta) d\eta\right) \quad (0 < \xi < 1, 0 \leq t \leq T) \quad (2.30)$$

angeben. Damit ergibt sich für $\xi = 1/2$

$$(F(x))(s) = \exp\left(-\pi^2 \int_0^s x(t) dt\right) \quad (0 \leq s \leq T). \quad (2.31)$$

Die inverse Aufgabe besteht in der Identifikation des Wärmeleitkoeffizientens als Funktion der Zeit auf der Grundlage von Temperaturmessungen. In Realität ist diese Aufgabe noch wesentlich schwieriger, da der Wärmeleitkoeffizient im Normalfall von der Temperatur selbst wieder abhängig ist.

Beide Beispiele führten auf eine nichtlineare Operatorgleichung der Gestalt

$$(F(x))(s) = c_0 \exp\left(c_1 \int_0^s x(t) dt\right) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (2.32)$$

mit von Null verschiedenen reellen Konstanten c_0 und c_1 . Betrachtet man das Raumpaars $X = Y = L^2(0, T)$ so ist der Operator $F : X \rightarrow Y$ mit $D = X$ stetig. Gleiches trifft zu, falls wir $X = Y = C[0, T]$ wählen. Allerdings müssen wir in beiden Fällen feststellen, dass nichtlineare Gleichungen vom Typ (2.32) lokal inkorrekt sind. Wir verdeutlichen das hier am Spezialfall $c_0 = c_1 = 1$, $x_0(t) \equiv 0$. Dann gilt

$$y_0(s) = (F(x_0))(s) \equiv 1.$$

Es gibt aber für beliebig kleine Radien r Folgen stetiger Funktionen

$$x_n(t) = \frac{r \cos nt}{2\left(1 + \frac{r \sin nt}{2n}\right)}$$

mit

$$\|x_n\|_{C[0, T]} \leq \frac{r}{2\left(1 - \frac{r}{2n}\right)} \leq r \quad \text{und} \quad x_n \in \bar{B}_r^D(x_0),$$

falls n hinreichend groß ist. Es gilt außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{C[0, T]} = \frac{r}{2}$$

und damit $x_n \not\rightarrow x_0$ in $C[0, T]$. Die Folge der Bildfunktionen

$$y_n(s) = (F(x_n))(s) = 1 + \frac{r \sin ns}{2n} \quad (0 \leq s \leq T)$$

konvergiert dagegen in $C[0, T]$ gegen $F(x_0)$ wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_0\|_{C[0, T]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2n} = 0.$$

Diese Beziehung bedeutet aber gerade die lokale Inkorrektheit der Aufgabe.

Beispiel 2.6 Es ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte y einer Summe von zwei stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen mit den Wahrscheinlichkeitsdichten u und v über die Faltung

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s-t)v(t) dt \quad (-\infty < s < \infty)$$

berechnet werden kann. Gilt speziell $u(t) = v(t) = 0$ für $t < 0$ und $x(t) := u(t) = v(t)$, d.h. die beiden Zufallsgrößen sind identisch verteilt und nehmen mit Wahrscheinlichkeit 1 positive Werte an, dann haben wir $y(s) = 0$ für $s < 0$ und

$$y(s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s < \infty)$$

Es sei nun die Funktion $y(s)$ im Intervall $[0, 1]$ bekannt. Davon ausgehend wollen wir die Dichtefunktion $x(t)$ in eben diesen Intervall ermitteln. Dies ist ein nichtlineares Identifikationsproblem, welches durch die sogenannte Selbstfaltungsgleichung charakterisiert wird. Der Selbstfaltungsoperator F besitzt die Form

$$(F(x))(s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1). \quad (2.33)$$

Formel (2.33) liefert für $x \in L^2(0, 1)$ immer eine stetige Bildfunktion $(F(x))(s)$. Wir betrachten nun die Raumwahl

$$F : L^2(0, 1) \supset D \rightarrow L^2(0, 1)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D := \{x \in L^2(0, 1) : x(t) \geq 0 \text{ für fast alle } t \in [0, 1]\}. \quad (2.34)$$

Unter diesen Umständen ist die Selbstfaltungsgleichung in jedem Punkt x_0 lokal inkorrekt, denn es gibt zu jedem $r > 0$ eine Folge

$$x_n = \begin{cases} x_0(t) & 0 \leq t \leq 1 - 1/n \\ x_0(t) + r\sqrt{n} & 1 - 1/n < t \leq 1 \end{cases}$$

mit

$$\|x_n - x_0\|_{L^2(0,1)} = r \quad \text{und} \quad x_n \in \bar{B}_r^D(x_0).$$

Damit gilt $x_n \not\rightarrow x_0$ in $L^2(0,1)$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter ist

$$(F(x_n))(s) - (F(x_0))(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 1 - 1/n \\ 2r\sqrt{n} \int_0^{s-(1-1/n)} x_0(t) dt & 1 - 1/n < s \leq 1. \end{cases}$$

Das Maximum dieses Ausdruckes ist

$$\max_s (F(x_n))(s) - (F(x_0))(s) = 2r\sqrt{n} \int_0^{1/n} x_0(t) dt,$$

daraus folgt die Abschätzung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq 2r \int_0^{1/n} x_0(t) dt.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung impliziert jetzt die Grenzbeziehung

$$\|F(x_n) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq 2r \sqrt{\int_0^{1/n} 1 dt} \sqrt{\int_0^{1/n} x_0^2(t) dt} \leq 2r \frac{1}{\sqrt{n}} \|x_0\|_{L^2(0,1)} \rightarrow 0,$$

also lokale Inkorrektheit.

2.5 Was nützen Zusatzinformationen ?

Bisher haben wir uns mit verschiedenen Aspekten der Inkorrektheit beschäftigt. Diese zeichneten sich dadurch aus, dass die Lösung nicht eindeutig bestimmt war und/oder die Lösung instabil auf beliebig kleine Fehler reagierte. Ein entscheidendes Mittel zur Überwindung der Inkorrektheit oder wenigstens der Reduktion negativer Auswirkungen auf den Lösungsprozess besteht in der geschickten Einbeziehung von *Zusatzinformationen* über den Vorgang und über die erwartete Lösung. Diese Zusatzinformationen werden auch häufig als *Apriori-Informationen* bezeichnet. Der Einsatz solcher Informationen bietet die Chance, die informationsvernichtende Wirkung des glättenden Operators der direkten Aufgabe teilweise zu kompensieren.

2.5.1 Objektive und subjektive Apriori-Informationen

Unter Zusatzinformationen in Bezug auf die Datenfehler oder Störungen in der rechten Seite der Operatorgleichung versteht man zusätzliche Angaben über den Charakter der tatsächlichen verfügbaren Näherung y_δ zur exakten rechten Seite $y \in Y$ einer solchen Operatorgleichung. Man unterscheidet hier deterministische und stochastische Zusatzinformationen über den Fehler der rechten Seite. Ist z.B. y eine auf dem Intervall $[c, d]$ definierte reelle Funktion aus dem Funktionenraum Y , so stellen die Vorgabe einer Fehlerschranke δ die schon in (1.3) erwähnte Beschränkung der Fehlernorm

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \quad (2.35)$$

oder die punktweise Beschränkung des Fehlers

$$|y_\delta(s) - y(s)| \leq \delta \quad (c \leq s \leq d) \quad (2.36)$$

deterministische Zusatzinformationen dar.

Ist Y ein n -dimensionaler Vektorraum, wobei anstelle des exakten Vektors y der rechten Seite nur ein gestörter Datenvektor

$$z = y + \varepsilon \quad (2.37)$$

zur Verfügung steht. Eine häufig verwendete stochastische Zusatzinformation ist, dass die Komponenten des Fehlervektors ε normalverteilt sind

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, C). \quad (2.38)$$

Diese Darstellung bedeutet, dass kein systematischer Beobachtungsfehler vorliegt und der Fehlervektor Realisierung eines normalverteilten zufälligen Vektors mit Erwartung $E\varepsilon = 0$ und Kovarianzmatrix C ist. Diese ist natürlich symmetrisch und positiv semidefinit. In vielen Fällen gelingt es, die Messwertgewinnung so zu gestalten, dass sich die einzelnen Messungen nicht beeinflussen, d.h. es gilt $C = \sigma^2 I$. Die daraus resultierende Modellannahme

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I) \quad (2.39)$$

wird auch als *weißes Rauschen* des Datenfehlers bezeichnet. Zusatzinformationen über die Eingangsdaten werden im allgemeinen genutzt, um nur solche

Elemente $x \in X$ als mögliche Lösungen zuzulassen, die unter Berücksichtigung des Operators der direkten Aufgabe zu den Daten passen oder in einem gewissen Sinne mit den Daten kompatibel sind. So bedeutet zum Beispiel Kompatibilität zur deterministischen Zusatzinformation (2.35), dass die ermittelte Lösung x^* die Beziehung

$$\|F(x^*) - y\|_Y \leq \delta \quad (2.40)$$

erfüllen muss. Andererseits lassen sich stochastische Zusatzinformationen der Gestalt (2.39) für die rechte Seite des Gleichungssystems (2.9) nur Vektoren x als kompatibel zu den Daten z erscheinen, wenn eine Beziehung

$$\|Ax - z\|_2^2 = fn\sigma^2 \quad (2.41)$$

erfüllt ist, wobei sich die rechte Seite als Produkt des Fehlererwartungswertes $E\|\varepsilon\|_2^2 = n\sigma^2$ mit einem Gleitfaktor $f \in [f_{min}, f_{max}]$ ergibt. Einige Autoren empfehlen aus persönlichen Erfahrungen heraus das Intervall $[0.7, 1]$ für diesen Gleitfaktor.

Da es meist noch viel zu viele Elemente x gibt, die zu den Eingangsdaten unter Berücksichtigung deterministischer und stochastischer Zusatzinformationen kompatibel sind, ist es zweckmäßig auch vorhandene Informationen über die zu erwartende Lösung x einfließen zu lassen. Wir unterscheiden dabei *objektive Apriori-Informationen*, also Zusatzinformationen, die sich aus physikalisch-technischen Zusammenhängen zwingend ergeben und damit unumstößlich sind, sowie *subjektive Apriori-Informationen*. Letztere bringen unsere mathematisch formulierten subjektiven Erwartungen an die Lösung zum Ausdruck.

Die objektiven Apriori-Informationen lassen sich in der Regel bei der Formulierung des Definitionsbereichs D der Operatoren F und A in die Gleichungen einbringen. Als Beispiele objektiver Zusatzinformationen wurden bereits früher die Normbeschränkung sowie Nichtnegativität, Monotonie und Konvexität stetiger Funktionen genannt. In der Praxis spielen solche objektiven Apriori-Informationen die wichtigste Rolle, welche auf abgeschlossene und konvexe Mengen D als Definitionsbereich führen.

Ergänzend zu den objektiven Zusatzinformationen zieht man in der Regel noch subjektive hinzu, um die Inkorrektheit der Aufgabe zu beheben. Unter allen Elementen die mit den Daten verträglich sind werden dann solche als

Lösung ausgewählt, die ein *Sympathiefunktional* $\Omega : X \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ minimieren:

$$\Omega(x) = \min!, \quad x \in D \subset X \text{ und } x \text{ datenkompatibel.} \quad (2.42)$$

Die Datenkompatibilität ist dabei im Sinne einer der beiden Beziehungen (2.40) oder (2.41) zu verstehen. Das Sympathiefunktional wird so konstruiert, dass Elementen x , die den Erwartungen an die Lösung der Aufgabe gut entsprechen, kleine Werte zugeordnet werden, während unsympathische mit großen Werten bestraft werden.

Orientiert man sich vorzugsweise an Elementen x die sich möglichst wenig von einem Referenzelement x^* unterscheiden, dann ist $\Omega(x) = \|x - x^*\|_X$ bzw. in Hilberträumen üblicherweise

$$\Omega(x) = \|x - x^*\|_X^2 \quad (2.43)$$

als Sympathiefunktional geeignet. Mit $x^* = 0$ wird dann besonders auf Elemente mit kleiner Norm zurückgegriffen.

Für Räume glatter Funktionen kommt häufig ein Sympathiefunktional

$$\Omega(x) = \int_a^b (x'(t))^2 dt \quad (2.44)$$

zur Anwendung. Dahinter steckt die Idee, dass weniger stark schwankende Funktionen gegenüber stark oszillierenden Funktionen bevorzugt werden. Alternativ kann auch die Forderung nach möglichst kleinen Krümmungen des Graphen verwendet werden. Dies entspricht einer Minimierung der L^2 -Norm der zweiten Ableitung. Auch eine Linearkombination dieser Funktionale

$$\Omega(x) = \lambda_1 \|x\|_{L^2(a,b)}^2 + \lambda_2 \|x'\|_{L^2(a,b)}^2 + \lambda_3 \|x''\|_{L^2(a,b)}^2 \quad (2.45)$$

mit nichtnegativen Gewichten λ_i ist hier möglich. Für Gleichungen mit stochastische Einflüssen wird meist auf den Begriff der Entropie zurückgegriffen. Das Sympathiefunktional hat dann die Gestalt

$$\Omega(x) = \int_a^b x(t) \ln \frac{x(t)}{x^*(t)} dt. \quad (2.46)$$

Dabei ist x^* wieder eine Referenzlösung mit $x^*(t) > 0$. Ein solcher Zugang wird als *Maximum-Entropie-Regularisierung* bezeichnet.

Subjektive Apriori-Informationen sollten bei der Behandlung von inversen Aufgaben aber so zurückhaltend wie möglich eingesetzt werden. Ist also zum Beispiel in Teilbereichen des Definitionsbereichs eine stabile Abhängigkeit der Lösung von den Daten zu erwarten, so sollten dort keine Sympathiefunktionen Anwendung finden. Die Gefahr von subjektiven Zusatzinformationen besteht darin, dass der Lösung die Vorstellung des Bearbeiters aufgezwungen werden. Fehlerhafte Vorstellungen über die Lösung führen dann zu falschen Sympathiefunktionalen und anschließend zu großen Fehlern in der Lösung.

In manchen Modellen spielen stochastische Zusatzinformationen eine Rolle. Das ist besonders der Fall, wenn die zu identifizierende Funktion oder der zu identifizierende Vektor randomisierbar sind, also selbst als Zufallsgröße aufgefasst werden können. Wir haben es dann mit Bayesschen Modellen zu tun. Typisch sind solche Situationen im Bereich Klimatologie und Meteorologie, bei denen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zufälligen Lösung oder im Vektorfall wenigstens der Erwartungsvektor $Ex = \mu$ und eine positiv definite Kovarianzmatrix B als bekannt vorausgesetzt werden können. Aus statistischer Sicht lässt sich dann die Verwendung der quadratischen Form

$$\Omega(x) = (x - \mu)^T B^{-1}(x - \mu) \quad (2.47)$$

als Sympathiefunktional motivieren. Die in diesem Abschnitt erwähnten stochastischen Zusatzinformationen finden ihre Anwendung bei der stabilen näherungsweise Lösung von schlecht konditionierten Gleichungssystemen.

2.5.2 Der Satz von Tichonov

Von Natur aus werden inkorrekte Aufgaben korrekt, wenn die zulässigen Lösungen auf eine kompakte Menge eingeschränkt werden. Das ist die Botschaft des Satzes von Tichonov, den wir in diesem Abschnitt formulieren werden. Eine Einschränkung von Lösungen auf kompakte Mengen führt zur Überwindung der instabilen Abhängigkeit der Lösung der inversen Aufgabe von den Eingangsdaten. Sie kann durch objektive Apriori-Informationen erreicht werden, wenn Zusatzinformationen, welche die erwartete Lösung der inversen Aufgabe qualitativ beschreiben, den Definitionsbereich $D \subset X$ des Operators F auf eine kompakte Menge einschränken. Diese Vorgehensweise wird als *deskriptive Regularisierung* bezeichnet. Die Informationen aus den Eingangsdaten werden mit diesen qualitativen Informationen vervollständigt.

Führen die objektiven Hintergrundinformationen nicht auf eine kompakte Menge, dann kann die Korrektheit des inversen Problems durch Einschränkung der Lösung auf eine subjektiv gewählte kompakte Menge erzwungen werden. Wie schon erwähnt, sollte mit diesen Einschränkungen sehr vorsichtig agiert werden, da man möglicherweise der Lösung ein glattes Verhalten aufzwingt, dass in der Realität gar nicht vorhanden ist. Man erkaufte sich in diesem Fall die Stabilität durch zusätzliche Approximationsfehler.

Theorem 6 (Tichonov) *Es sei $F : X \supset D \rightarrow Y$ ein stetiger injektiver Operator, der aus dem Banachraum X in den Banachraum Y abbildet und dessen Definitionsbereich D eine kompakte Teilmenge des Raumes X darstellt. Dann ist der inverse Operator $F^{-1} : Y \supset F(D) \rightarrow D \subset X$ stetig.*

Der Beweis für die Stetigkeit des inversen Operators ist recht einfach: Wir betrachten einen Punkt $y_0 = F(x_0)$ und eine Folge von Elementen $y_n = F(x_n)$, welche gegen y_0 konvergiert. Wir müssen nun nur zeigen, dass x_n gegen x_0 strebt. Aus der Kompaktheit von D erhalten wir die Existenz einer Teilfolge x_{n_k} , die in der Menge D gegen ein Element x^* konvergiert. Die Stetigkeit von F impliziert

$$x_{n_k} \rightarrow x^* \Rightarrow y_{n_k} = F(x_{n_k}) \rightarrow F(x^*).$$

Die y_n konvergieren gegen y_0 , also auch jede Teilfolge. Folglich gilt $F(x^*) = y_0$ und aus der Injektivität folgt $x^* = x_0$. Bis jetzt haben wir das gewünschte Resultat nur für eine Teilfolge. Wir benötigen nun nur noch folgendes Argument: Enthält jede Teilfolge a'_n einer Folge a_n eine Teilfolge a''_n , welche gegen ein bestimmtes Grenzelement a konvergiert, dann konvergiert a_n selbst gegen a . \square

Als Folgerung aus diesem Satz erhält man sofort, dass die Kompaktheit des Definitionsbereichs D dafür sorgt, dass mit der Hadamardschen Eindeutigkeitsbedingung auch die Hadamardsche Stabilitätsbedingung erfüllt ist.

Folgerung 4 *Wird ein Identifikationsproblem durch einen stetigen injektiven Operator F und kompaktem Definitionsbereich D beschrieben, so ist die Stabilitätsbedingung stets erfüllt.*

Für den Beweis von Theorem 6 benötigten wir die Injektivität nur im betrachteten Punkt. Es gilt daher auch:

Theorem 7 *Besitzt eine Operatorgleichung zu einer speziellen rechten Seite y_0 eine eindeutig bestimmte Lösung $x_0 \in D$, wobei der Operator F stetig und der Definitionsbereich D kompakt ist, so gilt*

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } X. \quad (2.48)$$

Die Kompaktheit des Definitionsbereichs ist nicht nur eine stabilisierende Eigenschaft für Identifikationsprobleme. Sie ist auch äußerst hilfreich für Extremalprobleme der Form (1.4).

Theorem 8 *Das Extremalproblem (1.4) ist stets korrekt im Sinne unserer Definition mit Hilfe des Quasiabstands, falls der Operator $F : X \supset D \rightarrow Y$ stetig ist und der Definitionsbereich D durch eine nichtleere und in X kompakte Menge charakterisiert wird.*

Betrachtet man die Überlegung von früher etwas genauer, so ist unter den genannten Voraussetzungen das Extremalproblem stabil in folgendem Sinne:

Folgerung 5 *Unter den die Kompaktheit von D einschließenden Voraussetzungen von Theorem 8 ist eine Folge $\{x_n\} \subset D$ mit*

$$\|F(x_n) - y_n\|_Y \leq \inf_{x \in D} \|F(x) - y_n\|_Y + \eta_n,$$

$\|y_n - y_0\|_Y \leq \delta_n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$$

eine minimierende Folge des Extremalproblems

$$\|F(x) - y_0\|_Y = \min!, \quad x \in D \subset X, \quad (2.49)$$

d.h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y_0\|_Y = \min_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y.$$

Darüber hinaus strebt der Punkt-Mengen-Abstand der Elemente der Folge $\{x_n\}$ zur Lösungsmenge

$$L_{min} = \{x_{min} \in D : \|F(x_{min}) - y_0\|_Y = \inf_{x \in D} \|F(x) - y_0\|_Y \neq \emptyset\}$$

von (2.49) gegen Null, also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, L_{min}) = 0.$$

Sowohl die Existenzbedingung als auch die Stabilitätsbedingung folgen unter den die Kompaktheit von D einschließenden Voraussetzungen aus der Tatsache, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x_n) - y\| = \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$$

für eine Folge $\{x_n\} \subset D$ die Existenz einer Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in D$$

und $\|F(\tilde{x}) - y\| + \inf_{x \in D} \|F(x) - y\|_Y$ nach sich zieht.

Die genannten Stabilitätseigenschaften von Extremalproblemen bei kompakter Menge D machen sich viele Zugänge zur näherungsweise Lösung inverser Aufgaben nutzbar. Voraussetzung dafür ist aber, dass im Raum X eine geeignete Menge D gefunden wird. Im endlichdimensionalen Raum $X = \mathbb{R}^n$ stellt dies kein Problem dar, da alle beschränkten und abgeschlossenen Mengen kompakt sind. Vernünftige Schranken für einzelne Komponenten lassen sich häufig aus physikalischen Überlegungen ableiten. In diesem Sinne ist auch das folgende inverse Matrixeigenwertproblem stabil lösbar.

Beispiel 2.7 In diesem Beispiel gehen wir von n fest vorgegebenen symmetrischen Matrizen $M_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ aus und bilden ihre Linearkombinationen

$$M = x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_n M_n.$$

Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ebenfalls wieder eine symmetrische Matrix. Die m reellen Eigenwerte von M ordnen wir $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m$ und fassen sie im Vektor y zusammen. Dazu gibt es Eigenvektoren u_i mit

$$M(x)u_i = y_i u_i. \tag{2.50}$$

Das Matrixeigenwertproblem besteht in der Berechnung der Eigenwerte y bei vorgegebenen x . Diese Eigenwerte sind bei Vorgabe eines beliebigen Vektors x stets eindeutig bestimmt. Weiter weiß man aus der Eigenwerttheorie, dass kleine Störungen in x auch nur kleine Störungen in den Eigenwerten nach sich ziehen. In diesem Sinne ist der nichtlineare Operator

$$F : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

der direkten Aufgabe stetig und die direkte Aufgabe korrekt (bei beliebigem D). Dagegen stellt die Aufgabe der Identifikation von $x \in D$ bei gegebenen Eigenwertvektor y eine inverse Aufgabe dar, die im allgemeinen inkorrekt nach Hadamard ist, da nicht zu allen Vektoren y passende Multiplikatoren x existieren. Darüber hinaus können möglicherweise verschiedene Vektoren x zum gleichen Eigenwertvektor y führen.

Das in Beispiel 2.7 betrachtete Identifikationsproblem gehört zur großen Klasse von inversen Eigenwertproblemen. Es entspricht der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems

$$F(x) = y \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \quad (2.51)$$

mit m nichtlinearen Gleichungen

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = y_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

in den Unbekannten x_1, \dots, x_n . Diese Gleichung stellt mit $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ einen Spezialfall der nichtlinearen Operatorgleichung dar. Der Operator

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

zerfällt in die nichtlinearen Funktionen f_j welche die Zuordnung $x \mapsto y_j$ der Matrixmultiplikatoren zum j -ten Eigenwert beschreiben. Diese Funktionen sind nicht analytisch angebar. Ihre Funktionswerte lassen sich jedoch beliebig genau berechnen, indem man die entsprechende Eigenwertaufgabe numerisch löst. Schränkt man den Definitionsbereich D des nichtlinearen Operators F auf eine kompakte Menge in \mathbb{R}^n ein, d.h.

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \dots, n)\}$$

und ist F injektiv auf D , so lässt sich Folgerung 4 anwenden, d.h. die Hadamardsche Stabilitätsbedingung wird erfüllt. Injektivität bedeutet dabei, dass es in D höchstens einen Multiplikatorenvektor x gibt, der auf einen festen Eigenwertvektor y führt. Dieser Fall liegt häufig in recht kleinen Bereichen D vor, deren entsprechende Matrizen nur einfache Eigenwerte besitzen. Kann die Injektivität von F auf D nicht gesichert werden, so führt im Sinne von Folgerung 5 eine Minimierung der Defektnorm

$$\|F(x) - y_\delta\|_{\mathbb{R}^m}$$

über alle $x \in D$ auch bei gestörten Eigenwertvektoren y_δ mit $\|y_\delta - y\|_{\mathbb{R}^m} \leq \delta$ auf Multiplikatoren x_δ die für $\delta \rightarrow 0$ gegen tatsächliche Lösungen des inversen Eigenwertproblems konvergieren. Aber auch bei Problemen, die sich als nichtlineare Gleichungssysteme mit kompakten Definitionsbereich schreiben lassen, kann es bei erfüllter Hadamardscher Stabilitätsbedingung große Fehler in der Lösung trotz kleiner Datenfehler geben. Dann haben wir es mit schlecht konditionierten nichtlinearen Gleichungssystemen zu tun. Wir haben diesen Aspekt bereits früher für lineare Gleichungssysteme angesprochen.

2.5.3 Kompakte Mengen in Funktionenräumen

Der Zugang über einen kompakten Definitionsbereich wird erst richtig spannend, wenn wir uns in unendlich dimensionalen Räumen bewegen. Hier stellen abgeschlossene und beschränkte Mengen *keine kompakten Mengen* dar. Jede Menge, die nur endlich viele Elemente umfasst ist kompakt, aber das kann ist nicht wirklich eine Lösung. Klassen nichtnegativer, monotoner oder konvexer Funktionen bilden ebenfalls keine kompakte Mengen, da sie Elemente mit beliebig großer Norm enthalten. Deshalb interessieren wir uns hier dafür, wie in speziellen Banachräumen kompakte Mengen aussehen bzw. gewählt werden können.

Betrachtet man als Banachraum X den Raum der stetigen Funktionen, dann gibt der Satz von Arzelà-Ascoli die Antwort über die Gestalt kompakter Mengen. Notwendig und hinreichend für die Kompaktheit einer abgeschlossenen Menge stetiger Funktionen ist die *gleichmäßige Beschränktheit* und die *gleichgradige Stetigkeit* dieser Funktionen. Die gleichgradige Stetigkeit ist zum Beispiel gesichert, wenn die Funktionen gleichmäßig hölder- oder lipschitzstetig sind.

In Räumen integrierbarer Funktionen kann die Monotonie bzw. die Konvexität von Funktionen zur Konstruktion kompakter Mengen genutzt werden. Auf diese Weise kann man praktikable Forderungen an zulässige Lösungen formulieren, die kompakte Definitionsbereiche und damit die Stabilität der Aufgabe sichern.

Wir betrachten nun den Banachraum $X = L^p(a, b)$ mit der Norm

$$\|x\|_{L^p(a,b)} := \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Je größer die Zahl p ist, umso stärker ist diese Norm. Für $1 \leq p < q < \infty$ gilt die Abschätzung

$$\|z\|_{L^p(a,b)} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|z\|_{L^q(a,b)}. \quad (2.52)$$

Außerdem interessieren wir uns noch für den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen $X = L^\infty$ mit der Norm

$$\|x\|_{L^\infty(a,b)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (a,b)} |x(t)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{L^p(a,b)}.$$

Unter dem wesentlichen Supremum versteht man dabei das Infimum über alle Zahlen s für die $|z(t)| \leq s$ in (a, b) bis auf eine Menge vom Maß Null gilt. Die L^∞ -Norm ist stärker als alle L^p -Normen und es gilt

$$\|z\|_{L^p(a,b)} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|z\|_{L^\infty(a,b)}. \quad (2.53)$$

Jede Menge *monotoner Funktionen* auf dem Intervall $[a, b]$ deren Funktionswerte durch feste endliche Konstanten beschränkt sind, ist kompakt in allen L^p -Räumen mit $1 \leq p < \infty$. In dieser Klasse von Funktionen liegen stetige und stückweise stetige Funktionen mit Sprüngen. Man kann daher auch Repräsentanten auswählen, die links- bzw. rechtsseitig stetig sind.

Lemma 4 *Mit $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \{x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] \ (a \leq t \leq b) : x(t_1) \geq x(t_2) \ (a \leq t_1 < t_2 \leq b)\} \quad (2.54)$$

von monoton wachsenden und gleichmässig beschränkten Funktionen im Raum $L^p(a, b)$ für alle $1 \leq p < \infty$ kompakt.

Übungsaufgabe 2.1 Warum ist diese Aussage falsch für den Raum $L^\infty(a, b)$?

Um die Aussage dieses Lemmas zu erhalten, benutzt man den Begriff der Totalvariation

$$\bigvee_a^b(x) := \sup_{a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq b} \sum_{i=1}^k |x(t_i) - x(t_{i-1})| \quad (2.55)$$

einer Funktion $x(t)$, wobei das Supremum in (2.55) über alle Zerlegungen in endlich viele Teilintervalle genommen werden muss. Alle Funktionen aus D sind von beschränkter Totalvariation, denn es gilt

$$\bigvee_a^b(x) \leq \bar{c} - \underline{c} = C.$$

Dann folgt aus dem Satz von Helly (siehe Natanson S.250), dass es in jeder unendlichen Teilmenge von D eine Folge $\{x_n\}$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \tilde{x}(t) \text{ und } \tilde{x} \in D$$

Da $|x_n(t) - \tilde{x}(t)|^p \leq C^p$ durch eine integrierbare Funktion beschränkt ist und für $n \rightarrow \infty$ fast überall nach Null strebt, liefert der Satz von Lebesgue wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \tilde{x}\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n(t) - \tilde{x}(t)|^p dt \right)^{1/p} = 0$$

die Behauptung des Hilfsatzes.

Weiterhin lässt sich zeigen, dass auch jede Menge *konvexer Funktionen* auf dem Intervall $[a, b]$, deren Funktionswerte durch feste Konstanten beschränkt sind, eine kompakte Menge im Banachraum $L^p(a, b)$ für $1 \leq p < \infty$ bilden. Ähnlich wie das vorige Lemma natürlich auch für analoge Mengen *monoton nichtfallender Funktionen* galt, gilt das nächste Lemma auch für analoge Mengen *konkaver Funktionen*.

Lemma 5 Mit $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ ist jede Menge der Gestalt

$$D = \left\{ x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] : x\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \leq \frac{x(t_1) + x(t_2)}{2} \text{ } t, t_1, t_2 \in [a, b] \right\} \quad (2.56)$$

von konvexen und gleichmässig beschränkten Funktionen im Raum $L^p(a, b)$ für alle $1 \leq p < \infty$ kompakt.

Können die Lösungen inverser Aufgaben auf Mengen D von gleichmäßig beschränkten Funktionen eingegrenzt werden, die monoton oder/und konvex sind, so sind die entsprechenden Aufgaben korrekt gestellt, d.h. die Lösungen hängen stabil von den Daten ab, falls $X = L^p(a, b)$ mit $1 \leq p < \infty$ gewählt wird und der Operator der direkten Aufgabe stetig ist. Nach Theorem 7 gilt daher

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } L^p(a, b). \quad (2.57)$$

Obwohl alle diese Mengen D nur Elemente aus $L^\infty(a, b)$ enthalten, kann man *nicht* auf eine gleichmäßige Konvergenz

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } L^\infty(a, b). \quad (2.58)$$

schließen. Der Grund besteht in der Nichtkompaktheit solcher Mengen D in $L^\infty(a, b)$ (siehe Übungsaufgabe 2.1). Ist die Lösung x_0 eine stetige Funktion, dann können wir diese Aussage aber teilweise retten. In diesem Fall gilt für beliebig kleines $\varepsilon > 0$

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } L^\infty(a + \varepsilon, b - \varepsilon), \quad (2.59)$$

d.h. in jedem abgeschlossenen Teilintervall, welches die Randpunkte nicht enthält ist die Konvergenz gleichmäßig. Besteht die Menge D aus nichtwachsenden *und* konvexen Funktionen, so gilt sogar

$$F(x_n) \rightarrow F(x_0) \text{ in } Y, x_n \in D \quad \Rightarrow \quad x_n \rightarrow x_0 \text{ in } L^\infty(a + \varepsilon, b), \quad (2.60)$$

d.h. das rechte Intervallende wird in die gleichmäßige Konvergenz eingeschlossen.

Wie im Beweis von Lemma 4 gesehen, ist die entscheidende Eigenschaft die beschränkte Totalvariation. Deshalb gilt auch das Lemma:

Lemma 6 *Mit $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \left\{ x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}] \ (a \leq t \leq b) : \bigvee_a^b(x) \leq K \right\} \quad (2.61)$$

von gleichmäßig beschränkten Funktionen mit gleichmäßig beschränkter Totalvariation kompakt im Raum $L^p(a, b)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Somit stabilisieren Schranken an die Totalvariation das Lösungsverhalten für Aufgaben mit nicht monotonen und nicht konvexen Lösungen. Die Argumentation ist die gleiche wie in Lemma 4. Funktionen mit beschränkter Totalvariation sind linksseitig bzw. rechtsseitig stetig und können an endlich oder abzählbar vielen Stellen Sprünge aufweise. Offenbar sind solche Funktionenmengen wesentlich umfassender als monotone oder konvexe Funktionenmengen.

Es ist durchaus auch von Interesse, Lösungsräume X behandeln zu können bei denen auch Ableitungen der betrachteten Funktionen eine Rolle spielen. Man interessiert sich dabei speziell für die in der Theorie der Differential- und Integralgleichungen wichtigen *Sobolevräume*.

Wir beschränken uns hier auf den Raum $H^1(a, b)$. In diesem Raum liegen alle Funktionen, deren schwache Ableitung quadratisch integrierbar ist. Die Norm in diesem Raum ist gegeben durch

$$\|z\|_{H^1(a,b)} = \sqrt{\int_a^b (z(t)^2 + z'(t)^2) dt}. \quad (2.62)$$

Mit dem passenden Skalarprodukt wird dieser Raum zum Hilbertraum. Wie im Falle der L^p -Räume können die Werte solcher Funktionen auf einer Menge vom Maß Null abgeändert werden. Trotzdem findet man im eindimensionalen immer eine stetige Funktion als Repräsentanten. Diese Funktionen sind auch fast überall im klassischen Sinne differenzierbar. Es gilt die Inklusionen

$$H^1(a, b) \subset C[a, b] \subset L^2(a, b).$$

Man spricht in solchen Fällen davon, dass der Raum H^1 in den Raum C eingebettet ist. Diese Einbettungen sind auch stetig, d.h. es gelten die Abschätzungen

$$\|z\|_{C[a,b]} \leq K_1 \|z\|_{H^1(a,b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b) \quad (2.63)$$

und

$$\|z\|_{L^2(a,b)} \leq K_2 \|z\|_{H^1(a,b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b) \quad (2.64)$$

mit gewissen positiven Konstanten K_1 und K_2 . Wegen (2.62) kann man $K_2 = 1$ wählen. Diese Überlegungen zeigen, dass die Sobolevnorm stärker als die beiden anderen Normen ist. Mehr noch, die betrachteten Einbettungen sind nicht nur stetig, sondern sogar kompakt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 7 (Rellich-Kondrachov) *Es sei K eine positive Konstante. Dann ist die Menge*

$$D = \{x \in H^1(a, b) : \|x\|_{H^1(a, b)} \leq K\} \quad (2.65)$$

als Teilmenge der Banachräume $C[a, b]$ und $L^2(a, b)$ jeweils relativ kompakt.

Leider erlaubt die in diesem Lemma betrachtete Menge D nicht die Anwendung der Stabilitätsaussagen für inverse Aufgaben. Der Grund dafür liegt in der Nichtabgeschlossenheit der Menge D . Wir werden jedoch im weiteren sehen, dass diese Menge trotzdem eine gewisse Rolle bei der stabilen näherungsweise Lösung inverser Aufgaben spielt.

Die genannte Einbettungseigenschaft in dem Raum der stetigen Funktionen gilt nur, da das Intervall (a, b) eindimensional ist. Für mehrdimensionale Gebiete ist diese Aussage falsch. Genauere Aussagen dazu bieten die Einbettungssätze, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen.

Zum Abschluss des Kapitels zeigt der folgende Hilfssatz auf, wie man kompakte Mengen im Raum H^1 konstruieren kann.

Lemma 8 *Mit $-\infty < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$, $-\infty < \underline{d} \leq \bar{d} < \infty$, $0 < K < \infty$ ist jede Menge der Gestalt*

$$D = \left\{ x \in H^1(a, b) : \begin{array}{l} x(t) \in [\underline{c}, \bar{c}], x'(t) \in [\underline{d}, \bar{d}], a \leq t \leq b \\ \bigvee_a^b(x') \leq K \end{array} \right\} \quad (2.66)$$

von Funktionen mit gleichmäßig beschränkten Werten der Funktion und ihrer Ableitung sowie mit zusätzlich gleichmäßig beschränkter Totalvariation der verallgemeinerten Ableitung kompakt im Raum $H^1(a, b)$.

Wir beenden das Kapitel mit einigen Übungsaufgaben.

Übungsaufgabe 2.2 In Anlehnung an das Beispiel 2.1 charakterisiert die lineare Operatorgleichung

$$(Ax)(s) = \int_0^s (s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq T)$$

in den Räumen $X = C[0, T]$ und $Y = L^2(0, T)$ die Identifikation der zeitabhängigen Beschleunigung x eines zum Nullzeitpunkt in Ruhe befindlichen Fahrzeuges aus Messungen des zurückgelegten Weges y . Zeigen Sie, dass die Gleichung inkorrekt ist und diskutieren Sie dabei die Erfüllung der drei Hadamardschen Bedingungen.

Übungsaufgabe 2.3 Man leite im Beispiel 2.5 mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen die Darstellungsformel (2.30) für das Anfangsrandwertproblem her.

Übungsaufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass der nichtlineare Operator F aus Formel (2.32) mit positiven Konstanten c_0, c_1 für alle quadratisch integrierbaren Funktionen $x \in L^2(0, T)$ eine stetige Bildfunktion $(F(x))(s)$ liefert und bestimmen Sie unter der Bedingung $\|x\|_{L^2(0, T)} \leq K$ untere und obere Schranken für die Werte dieser Bildfunktionen.

Übungsaufgabe 2.5 Der im Beispiel 2.6 eingeführte Selbstfaltungsoperator (2.33) werde für $X = L^2(0, 1)$ und D aus (2.34) mittels der Vorschrift

$$(F(x))(s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 2)$$

auf den Bildraum $Y = L^2(0, 2)$ erweitert. Dabei setzen wir die Funktionswerte $x(t)$ für Argumente $t \notin [0, 1]$ stets gleich Null. Zeigen Sie durch Konstruktion geeigneter Beispielfolgen, dass die nichtlineare Operatorgleichung auch mit dem erweiterten Selbstfaltungsoperator $F : L^2(0, 1) \supset D \rightarrow L^2(0, 2)$ in allen Punkten $x \in D$ lokal inkorrekt ist.

Übungsaufgabe 2.6 Die Stabilisierung von Identifikationsproblemen nach dem Satz von Tichonov beruht auf der Kompaktheit des Definitionsbereichs D der Aufgabe. Zeigen Sie, dass der Definitionsbereich

$$D = \{x(t) \in [-1, 1] \ (0 \leq t \leq 1) : x \text{ stetig}\},$$

der aus stetigen reellen Funktionen besteht, die nach oben und unten gleichmäßig beschränkt sind, in keinem der Funktionenräume $C[0, 1]$ und $L^2(0, 1)$ kompakt ist und demzufolge der Stabilisierungszugang von Abschnitt 2.5.2 darauf nicht angewendet werden kann.

Kapitel 3

Identifikationsprobleme im Hilbertraum

In diesem Kapitel betrachten wir Identifikationsprobleme, die sich als Operatorgleichungen in reellen Hilberträumen schreiben lassen. Wir bezeichnen dabei die auftretenden Skalarprodukte mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Die Normen in diesen Räumen sollen durch die Skalarprodukte erzeugt werden, d.h.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_X = \|x\|_X^2 \text{ und } \langle \cdot, \cdot \rangle_Y = \|y\|_Y^2.$$

Wir werden uns dabei auf separable Hilberträume beschränken. Dort stehen uns endliche oder abzählbare Orthonormalsysteme zur Verfügung, die eine explizite Darstellung bestimmter Sachverhalte ermöglichen. Besonders prägnante Aussagen gewinnt man dabei wieder bei unrestringierten linearen Identifikationsprobleme in Form von linearen Operatorgleichungen. Dabei soll der Operator der direkten Aufgabe wieder kompakt sein.

3.1 Lineare Operatorgleichungen im Hilbertraum

Wir haben im letzten Kapitel bereits die Korrektheit von linearen unrestringierten Identifikationsproblemen in Banachräumen im Sinne von Hadamard

diskutiert. Wir betrachten nun die Gleichung

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (3.1)$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass X und Y Hilberträume sind.

3.1.1 Grundbegriffe der Hilbertraumtheorie

Es sei H ein reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und daraus erzeugten Norm $\|\cdot\|$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

für alle Elemente x und y des Hilbertraums. Zwei Elemente heißen orthogonal, falls die Bedingung $\langle x, y \rangle = 0$ erfüllt ist. Für orthogonale Elemente gilt der Satz des Pythagoras

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Wir bezeichnen mit

$$T^\perp := \{x \in H : \langle x, z \rangle = 0 \quad \forall z \in T\}$$

das orthogonale Komplement einer Teilmenge T von H . Das orthogonale Komplement eines Teilraums H_1 von H ist ein abgeschlossener Teilraum von H . Ist H_1 ein abgeschlossener Teilraum, so kann H als orthogonale direkte Summe

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp$$

dargestellt werden, d.h. für jedes Element $x \in H$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$.

Eine Folge $\{e_n\} \subset H$ heißt Orthonormalsystem, wenn die Orthonormalitätsrelationen

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

gelten. Das Orthonormalitätssystem heißt vollständig, wenn sich jedes Element $x \in H$ in eine konvergente Fourierreihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

entwickeln lässt, wobei für alle $x \in H$ die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$$

erfüllt ist. Die Skalarprodukte $\langle x, e_n \rangle$ heißen Fourierkoeffizienten von x . Ist $\{e_n\} \subset H$ ein nicht notwendig vollständiges Orthonormalsystem, so gilt wenigstens die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

In separablen Hilberträumen gibt es immer vollständige endliche oder abzählbare Orthonormalsysteme.

Besonders einfach ist die Beschreibung des dualen Raumes, d.h. der Menge der linearen und beschränkten Funktionale. Der Satz von Riesz besagt, dass sich jedes solche Funktional in der Form

$$f(x) = \langle x, g \rangle \quad \text{für alle } x \in H$$

mit einem eindeutig bestimmten Repräsentantenelement $g \in h$ darstellen lässt. Unter den Konstanten $C > 0$, für die die Ungleichung

$$|f(x)| \leq C\|x\| \quad \text{für alle } x \in H$$

gilt, ist $C = \|g\|$ der kleinstmögliche Wert.

Neben der starken Konvergenz spielt in Hilberträumen auch die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ einer Folge $\{x_n\} \subset H$ gegen ein Grenzelement $x_0 \in H$ eine wesentliche Rolle. Eine Folge $\{x_n\} \subset H$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ schwach gegen x_0 , wenn für alle $g \in H$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, g \rangle = \langle x_0, g \rangle$$

erfüllt ist. Bei schwacher Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ gilt stets $\|x_0\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Das Grenzelement einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Die starke Konvergenz $x_n \rightarrow x_0$ zieht immer die schwache $x_n \rightharpoonup x_0$ nach sich. Andererseits liefern schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ und Konvergenz der Normen $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$ zusammen die starke Konvergenz $x_n \rightarrow x_0$ in H .

Jede in H beschränkte Menge ist relativ schwach kompakt, d.h. aus jeder unendlichen Folge $\{x_n\} \subset H$ kann man eine schwach konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ auswählen. Insbesondere konvergiert eine Folge $\{e_n\} \subset H$, die ein Orthonormalsystem bildet immer schwach gegen die Null, d.h.

$$e_n \rightharpoonup 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Aus der Besselschen Ungleichung folgt nämlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, e_n \rangle = 0.$$

Für die schwache Kompaktheit benötigt man zusätzlich noch die schwache Abgeschlossenheit. Auf diese kann man schließen, falls eine Menge abgeschlossen und konvex ist.

3.1.2 Eigenschaften beschränkter Operatoren im Hilbertraum

Wir betrachten nun lineare beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ in separablen Hilberträumen. Ein solcher Operator ist automatisch auch schwach stetig, d.h. es gilt

$$x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax_0.$$

Achtung: Diese Aussage ist falsch für nichtlineare Operatoren. Die schwache Stetigkeit ist eine stärkere Eigenschaft als die "normale" Stetigkeit. Über die Beziehung

$$\langle Au, v \rangle_Y = \langle u, A^*v \rangle_X$$

für alle $u \in X$ und $v \in Y$ lässt sich in eindeutiger Weise der zu A adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ definieren. Zwischen den Nullräumen $N(A)$ und $N(A^*)$ und den Bildräumen $R(A)$ und $R(A^*)$ von A und A^* bestehen die Beziehungen

$$X = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \quad \text{und} \quad Y = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}.$$

Falls $A \in \mathcal{L}(X, X)$ und $A = A^*$ gilt, so heißt A selbstadjungiert. Betrachtet man Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenelemente $u \in X$ mit $u \neq 0$ eines selbstadjungierten Operators, welche der Eigenwertgleichung

$$Au = \lambda u$$

genügen, so sind Eigenelemente u_1 und u_2 zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 orthogonal. Für beliebige Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sind die Operatorprodukte $A^*A \in \mathcal{L}(X, X)$ und $AA^* \in \mathcal{L}(Y, Y)$ selbstadjungiert. Die von Null verschiedenen Eigenwerte dieser beiden Operatorprodukte sind positiv und stimmen überein.

Jeder Operator A mit einem endlichdimensionalen Bildraum $\dim R(A) = m$ ist kompakt. Dann besitzen die Operatoren A^*A und AA^* eine endliche Folge von m nicht notwendigerweise verschiedenen nichtnegativen Eigenwerten und ein zugehöriges Orthonormalsystem

$$\{u_i\}_{i=1}^m \subset X \quad \text{mit } A^*Au_i = \lambda_i u_i$$

bzw.

$$\{v_i\}_{i=1}^m \subset Y \quad \text{mit } AA^*v_i = \lambda_i v_i.$$

Bei kompakten mit unendlichdimensionalem Bildraum sind die Eigenwerte von A^*A eine gegen Null strebende Folge positiver Zahlen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Auch hier gibt es entsprechende Orthonormalsysteme von Eigenelementen $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset X$ mit $A^*Au_i = \lambda_i u_i$ bzw. $\{v_i\}_{i=1}^\infty \subset Y$ mit $AA^*v_i = \lambda_i v_i$ zu Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, wobei $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum

$$\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*A)} = N(A)^\perp$$

des Hilbertraums X und $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum

$$\overline{R(A)} = \overline{R(AA^*)} = N(A^*)^\perp$$

des Hilbertraums Y bilden. Übrigens, der adjungierte Operator zu einem kompakten Operator ist ebenfalls kompakt.

3.1.3 Korrektheitsdefinition von Nashed

Folgen wir den Überlegungen von Nashed, so gelangen wir zu einer weiteren Definition, deren Beziehung zur Hadamardschen Definition wir im folgenden diskutieren werden.

Definition: Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y heißt korrekt nach Nashed, wenn der Bildraum des Operators A abgeschlossen ist, d.h. wenn gilt

$$R(A) = \overline{R(A)}. \quad (3.2)$$

Ist der Bildraum von A nicht abgeschlossen, gilt also

$$R(A) \neq \overline{R(A)}, \quad (3.3)$$

so heißt (3.1) inkorrekt nach Nashed. Sie heißt *inkorrekt vom Typ I*, falls A kein kompakter Operator ist, und *inkorrekt vom Typ II*, falls es sich bei A um einen kompakten Operator handelt.

Da jeder endlichdimensionale Teilraum abgeschlossen ist, sind lineare Operatorgleichungen mit endlichdimensionalem Bild immer korrekt nach Nashed. Die Inkorrektheit vom Typ I ist dadurch gekennzeichnet, dass der Bildraum wenigstens einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum enthält. Dagegen führen kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalen Bildräumen auf Inkorrektheit vom Typ II. Nashed selbst bemerkt in seinen Arbeiten, dass die Inkorrektheit vom Typ I weniger stark ist als die vom Typ II. Das lässt sich damit begründen, dass kompakte Operatoren viel mehr glätten als nicht kompakte.

3.1.4 Moore-Penrose-Inverse, Stabilität, Beispiele

Im Kapitel 2 haben wir uns bei der Diskussion der Korrektheit linearer Operatorgleichungen nach Hadamard vielfach auf den Fall eines injektiven Operators zurückgezogen. Im Hilbertraum können wir auch relativ bequem den nichtinjektiven Fall behandeln, indem wir mit verallgemeinerten Inversen arbeiten. Wir konzentrieren uns hier auf die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger . Unter Verwendung dieser verallgemeinerten Inversen von A werden wir zeigen können, dass die Korrektheit nach Nashed gleichwertig ist mit der Erfüllung der Stabilitätsbedingung von Hadamard. Die Korrektheitsbedingung von Nashed ist also weder an Existenz von Lösungen noch an deren Eindeutigkeit gebunden.

Im Zusammenhang mit der Überwindung der Mehrdeutigkeit bei der Lösung von Identifikationsproblemen haben wir den Begriff Minimum-Norm-Lösung

eingeführt. Für die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y kann man entsprechend formulieren, dass ein Element $x_{mn} \in X$ mit

$$\|Ax_{mn} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_Y \quad (3.4)$$

Minimum-Norm-Lösung genannt wird, wenn

$$x_{mn} = \min\{\|\tilde{x}\| : \|A\tilde{x} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_Y, \tilde{x} \in X\} \quad (3.5)$$

gilt. Wir überlegen uns, dass für $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ eine solche Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = x_{mn}(y)$ stets existiert und eindeutig bestimmt ist. Jedes Element $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ kann man nämlich darstellen in der Form

$$y = A\tilde{x} + y_{ort}, \quad \tilde{x} = x_0 + x_{ort}$$

Dabei sind für gegebenes y die Elemente $y_{ort} \in R(A)^\perp = N(A^*)$ und $x_{ort} \in N(A)^\perp$ eindeutig bestimmt, während das Nullraumelement x_0 beliebig gewählt werden kann. Wegen

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \|Ax - A\tilde{x}\|_Y^2 + \|y_{ort}\|^2$$

minimieren genau alle Elemente \tilde{x} welche auch die Gleichung $A^*A\tilde{x} = A^*y$ erfüllen, die Defektnorm $\|Ax - y\|_Y$. Darunter ist wegen $\|\tilde{x}\|_X^2 = \|x_0\|_X^2 + \|x_{ort}\|_X^2$ das Element $x_{mn} = x_{ort}$ das eindeutig bestimmte normkleinste Element und damit eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung. Übrigens existieren keine Minimum-Norm-Lösungen für $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$ (siehe Aufgabe 3.1).

Wir können nun die auf der Menge $R(A) \oplus R(A)^\perp$ definierte *Moore-Penrose-Inverse* A^\dagger von A über die Beziehung

$$A^\dagger y := x_{mn}, \quad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp \quad (3.6)$$

eingeführen. Wichtige Eigenschaften von A^\dagger findet man im folgendem Lemma.

Lemma 9 *Der in Hilberträumen X und Y über die Beziehung (3.6) definierte Operator*

$$A^\dagger : Y \supset R(A) \oplus R(A)^\perp \rightarrow X$$

ist linear mit

$$N(A^\dagger) = R(A)^\perp \quad \text{und} \quad R(A^\dagger) = N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

Weiter ist A^\dagger genau dann stetig, wenn $R(A)$ abgeschlossen ist.

Dieses Lemma impliziert direkt das folgende Ergebnis.

Theorem 9 *Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y ist korrekt nach Nashed genau dann, wenn die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger des Operators A stetig ist.*

im Falle der Korrektheit nach Nashed existieren für beliebige Eingangsdaten $y \in Y$ Minimum-Norm-Lösungen x_{mn} zu (3.1). Darüber hinaus ist A^\dagger ein auf dem gesamten Hilbertraum Y definierter beschränkter linearer Operator $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$. Kleine Störungen in der rechten Seite führen dann auch nur zu kleinen Änderungen in der Minimum-Norm-Lösung. Wie der folgende Satz zeigt, hat dies aber auch noch weitergehende Konsequenzen für die Stabilität des Problems (3.1) im Sinne der Korrektheitsdefinition von Hadamard.

Theorem 10 *Für eine lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y ist die Konvergenzbedingung (2.2) und damit die Hadamardsche Stabilitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn (3.1) korrekt nach Nashed ist.*

Ist (3.1) korrekt nach Nashed, dann ist also $R(A) = \overline{R(A)}$ erfüllt und $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$. Wir erhalten somit für eine Folge $\{y_n\} \subset R(A)$ mit $\|y_n - y_0\|_Y \rightarrow 0$ von gestörten Elementen zu $y \in R(A)$ und zugehörigen Urbildmengen

$$U(y_n) = \{x \in X : Ax = y_n\} = \{x = A^\dagger y_n + x_N : x_N \in N(A)\} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

die Beziehung (2.2) und damit die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Definition, weil wir mit $\|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X)} < \infty$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) &:= \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X \\ &= \|A^\dagger(y_n - y_0)\|_X \leq \|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|y_n - y_0\|_Y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

bekommen. Hier haben wir schon die Identität

$$\text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) = \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X = \|A^\dagger(y_n - y_0)\|_X$$

für $y_n \in R(A)$ verwendet. Diese Identität gilt auch, wenn (3.1) inkorrekt nach Nashed ist, also $R(A) \neq \overline{R(A)}$ gilt. Dann ist A^\dagger ein linearer unbeschränkter

Operator. Wegen der Unbeschränktheit von A^\dagger gibt es dann eine Folge $\{f_n\} \subset R(A)$ mit $\|f_n\|_Y = 1$ mit $\varphi_n := \|A^\dagger f_n\|_X \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Setzt man $\delta_n := \|y_n - y_0\|_Y$ und $y_n := y_0 + \delta_n f_n$, so erhält man

$$\text{qdist}(U(y_n), U(y_0)) = \|y_n - y_0\|_Y \|A^\dagger f_n\|_X = \delta_n \varphi_n.$$

Nur dann, wenn δ_n schnell genug gegen Null strebt, ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \varphi_n = 0.$$

Es gibt also Folgen $y_n \rightarrow y_0$ in Y , für die (2.2) verletzt ist. Die Stabilitätsbedingung von Hadamard ist somit nicht erfüllt, sobald (3.1) inkorrekt nach Nashed ist.

Aus den obigen Überlegungen folgt auch, dass unter der Bedingung (3.3) ($R(A) \neq \overline{R(A)}$) die Minimum-Norm-Lösungen $A^\dagger y_n$ zu gestörter rechter Seite $y_n \in R(A)$ von (3.1) nicht notwendigerweise gegen die Minimum-Norm-Lösung $A^\dagger y_0$ zu exakter rechter Seite streben, wenn mit $y_n \rightarrow y_0$ in Y die Störungen für $n \rightarrow \infty$ beliebig klein werden.

An drei Beispielen wollen wir uns nun die drei möglichen Alternativen der Definition, Korrektheit, Inkorrekttheit vom Typ I und Inkorrekttheit vom Typ II veranschaulichen. Wir beginnen mit dem nach Nashed korrekten Fall. Als Folgerung von Theorem 10 erhält man bei Betrachtung endlichdimensionaler Räume:

Folgerung 6 *Wenn der Bildraum $R(A)$ endlichdimensional ist, erfüllt die Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y immer die Hadamardsche Stabilitätsbedingung. Dies ist insbesondere dann stets der Fall, wenn X und Y selbst endlichdimensionale Räume sind.*

Beispiel 3.1 Ein klassisches Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie, das seit mehr als 20 Jahren von Meteorologen und Mathematikern gleichermaßen mit Interesse betrachtet wird, ist die Rekonstruktion vertikaler Lufttemperaturprofile. Auf der Grundlage von Messdaten von einem in großer Höhe befindlichen Satelliten über einen festen Punkt der Erdoberfläche soll die vertikale Temperaturverteilung ermittelt werden. Die Kenntnis der Temperaturverteilung in verschiedenen Höhen der Erdatmosphäre stellt einen wichtigen Faktor für eine zuverlässige Wettervorhersage dar.

Dabei ist die Lösung des inversen Problems aus indirekten Messungen wesentlich wirtschaftlicher als die direkte Messung der vertikalen Temperaturverteilung. Bei letzterer benötigt man Ballons, die Wittersonden in große Höhen tragen. Das ist zum einen sehr teuer und zum anderen über unbewohnten Gebieten nur schwierig zu realisieren. Am Bord des Satelliten befinden sich Infrarotmessgeräte, die in Frequenzbereichen die Intensität der Wärmestrahlung der zwischen Satellit und Erdboden liegende Luft messen können. Unterteilt man diesen Bereich in n Höhengschichten, so kann das Identifikationsproblem näherungsweise als lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \quad (3.7)$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten formuliert werden, wobei die Elemente a_{ji} der rechteckigen Matrix

$$A = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

numerische Werte für die mittlere Durchlässigkeit der i -ten Höhengschicht der Atmosphäre in Bezug auf Wärmestrahlung aus dem j -ten gemessenen Frequenzbereich enthalten, deren näherungsweise Kenntnis für die Behandlung des betrachteten indirekten Messproblems unverzichtbar ist. Die Komponente x_i des in diesem Identifikationsproblems gesuchten Vektors x stellt die mittlere Temperatur der i -ten Höhengschicht dar, während die Komponente y_j des Datenvektors y die gemessene Intensität der Wärmestrahlung im j -ten Frequenzbereich zum Ausdruck bringt. Das möglicherweise überbestimmte ($m > n$) oder unterbestimmte ($m < n$) lineare Gleichungssystem ist ein Spezialfall der linearen Operatorgleichung in den endlichdimensionalen Hilberträumen $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$. Als Skalarprodukte wählt man im einfachsten Fall die natürlichen (Euklidischen) Skalarprodukte. Die rechteckige Matrix A repräsentiert hier den linearen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aus (3.1). Da das betrachtete Problem endlichdimensional ist, ist der Operator A automatisch stetig und sogar kompakt. Die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger wird durch die Pseudoinverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$ repräsentiert. Das Problem (3.7) erfüllt wegen Folgerung 6 die Hadamardsche Stabilitätsbedingung, d.h. es gibt für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutig bestimmte Minim-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$, die stetig von y abhängt. Für den sogenannten Vollrangfall $\text{rang}(A) = n$, gilt

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

und damit die Darstellung

$$x_{mn} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (3.8)$$

mit einer regulären Matrix $A^T A$. Dieser Vollrangfall entspricht der Situation des injektiven Operators A in (3.1). Für den Fall $m < n$ und $\text{rang}(A) = m$ sei auf die Aufgabe 3.2 verwiesen. Obwohl lineare Gleichungssysteme (3.7) mit rechteckiger Matrix A stets korrekt nach Nashed sind, können sie, wie im Beispiel 2.2 erläutert, schlecht konditioniert sein. Damit führen kleine Fehler in der rechten Seite zu großen Fehlern in der Minimum-Norm-Lösung.

Die Konditionszahl hat im Fall einer Rechteckmatrix die Form

$$\text{cond}(A) = \|A\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \|A^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\text{span}(g_1, \dots, g_m) := \left\{ z \in Z : z = \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j, \lambda_j \in \mathbb{R} (j = 1, \dots, m) \right\}$$

die lineare Hülle der Elemente $\{g_j\}_{j=1}^m$. Sind diese Elemente linear unabhängig, so bilden die lineare Hülle $\tilde{Z} = \text{span}(g_1, \dots, g_m)$ einen m -dimensionalen Teilraum von Z . Die Elemente g_1, \dots, g_m stellen eine Basis dar in diesem Teilraum \tilde{Z} .

Abgesehen von den in Beispiel 3.1 betrachteten linearen Gleichungssystemen treten nach Nashed korrekte Operatorgleichungen (3.1) auch in unendlichdimensionalen Hilberträumen X und Y auf, wenn der Bildraum $R(A)$ endlichdimensional ist $\dim(R(A)) = m$. Dann heißt der Operator A ausgeartet und ist kompakt. Darüber hinaus gilt die Darstellung

$$Ax = \sum_{j=1}^m \langle x, f_j \rangle_X g_j, \quad (3.9)$$

wobei $\{g_j\}_{j=1}^m$ eine Basis des Bildraums $R(A)$ bezeichnet. Die Ausdrücke $\langle x, f_j \rangle_X$ mit $f_j \in X$ stellen nach dem Satz von Riesz existierende beschränkte lineare Funktionale auf dem Raum X dar.

Eine in X lösbare Operatorgleichung (3.1) mit A vom Typ (3.9) kann als lineares Gleichungssystem geschrieben werden, wenn man den Ansatz

$$x = \sum_{i=1}^n x_i h_i \quad \text{mit} \quad \text{span}(Ah_1, \dots, Ah_n) = \text{span}(g_1, \dots, g_m), \quad Ah_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} g_j$$

und $y = \sum_{j=1}^m y_j g_j$ verwendet. Wegen

$$Ax = \sum_{i=1}^n x_i Ah_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji} x_i g_j = \sum_{j=1}^m y_j g_j = y$$

müssen genau die m linearen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} x_i = \sum_{j=1}^m y_j$$

erfüllt sein. Auch wenn mit $\dim(R(A)) = \infty$ der Operator A nicht ausgeartet ist, kann der Bildraum $R(A)$ abgeschlossen sein. Das ist zum Beispiel bei Integralgleichungen zweiter Art der Fall. Diese Gleichungen spielen jedoch bei der Identifikation von Parameterfunktionen praktisch kaum eine Rolle.

Ein Kriterium zur Unterscheidung kompakter Operatoren von nicht kompakten liefert das folgende Lemma. Dieses erweist sich als nützlich, um nach Nashed inkorrekte Aufgaben vom Typ I und vom Typ II zu unterscheiden.

Lemma 10 *In Hilberträumen X und Y beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ sind genau dann kompakt, wenn für jede in X schwach konvergente Folge $x_n \rightharpoonup x_0$ die zugehörige Bildfolge stark in Y $Ax_n \rightarrow Ax_0$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert.*

Für das folgende Beispiel einer nach Nashed vom Typ I inkorrekten Operatorgleichung (3.1) benötigen wir als Bildraum den unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum l^2 , der alle quadratisch summierbaren unendlichen Zahlenfolgen $\xi = \{\xi_n\}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$$

enthält. Dabei bilden

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n \quad (3.10)$$

und

$$\|\xi\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2} \quad (3.11)$$

Skalarprodukt und Norm in diesem Raum. Der dazu analoge separable Hilbertraum für reelle Funktionen ist der von uns schon mehrfach verwendete Raum L^2 der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Beispiel 3.2 In diesem Beispiel betrachten wir das inverse Problem der Identifikation einer auf dem Einheitsintervall definierten elektrischen Ladungsdichte $x(t)$ aus Daten der k -ten Momente

$$m_k(x) = \int_0^1 t^k x(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots)$$

der Ladungsverteilung. Dieses Problem wird auch Hausdorffsches Momentenproblem genannt. Man kann dieses Problem als System

$$m_{j-1}(x) = y_j \quad (j = 1, 2, \dots)$$

mit unendlich vielen Gleichungen in der Funktion x schreiben. Die rechte Seite bildet eine unendliche Zahlenfolge $\{y_j\} \subset \mathbb{R}$. Für die Operatorgleichung (3.1) benutzen wir hier die Hilberträume $X = L^2(0, 1)$ und $Y = l^2$ sowie den linearen Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), l^2)$

$$(Ax)_j := \int_0^1 t^{j-1} x(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (3.12)$$

Es lässt sich zeigen, dass für den Operator A aus (3.12) die Beziehungen

$$\|Ax\|_{l^2} \leq \sqrt{\pi} \|x\|_{L^2(0,1)} \quad \text{und} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1), l^2)} := \sup_{x \in L^2(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{l^2}}{\|x\|_{L^2(0,1)}} = \sqrt{\pi}$$

gelten. Falls das hier definierte Hausdorffsche Momentenproblem lösbar ist, was nur für spezielle Datenfolgen $\{y_j\}$ der Fall sein wird, so ist es eindeutig lösbar, d.h. A ist injektiv. Darüber hinaus gilt das folgende Theorem:

Theorem 11 *Die aus dem Hausdorffschen Momentenproblem resultierende lineare Operatorgleichung (3.1) mit $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), l^2)$ aus Formel (3.12) ist inkorrekt nach Nashed vom Typ I, d.h. der Bildraum $R(A)$ ist nicht abgeschlossen, A^{-1} ist also unbeschränkt aber A ist kein kompakter Operator.*

Wir überzeugen uns von der Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems, indem wir ein Orthonormalsystem $\{e_n\} \subset L^2(0, 1)$ betrachten, dessen Funktionen überall gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es gilt

$$\|e_n\|_{C[a,b]} \leq C < \infty \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Zum Beispiel bilden die Funktionen $e_n = \sqrt{2} \sin n\pi t$ ein solches System. Dann haben wir schwache Konvergenz $e_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 1)$ und für die Bildfolge ergibt sich

$$\|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt \right)^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{j-1} dt \right)^2 = C^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{C^2 \pi^2}{6}.$$

Wegen $e_n \rightharpoonup 0$ und der Tatsache, dass jede der Funktionen t^{j-1} ein Element in $L^2(0, 1)$ vertritt, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

Dies hat nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für Reihen die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge zur Folge. Daher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 t^{j-1} e_n(t) dt \right)^2 = 0.$$

Im Falle injektiver Operatoren A gilt stets $x = A^\dagger Ax$ für alle Elemente des betrachteten Hilbertraumes. Wäre nun A^\dagger ein beschränkter linearer Operator, so müsste für eine Konstante $K > 0$ und alle n die Abschätzung

$$\|e_n\|_{L^2(0,1)} \leq \|A^\dagger(Ae_n)\|_{L^2(0,1)} \leq K \|Ae_n\|_{l^2}$$

gelten. Wegen $\|e_n\|_{L^2(0,1)} = 1$ und $\|Ae_n\|_{l^2} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ kann eine solche Eigenschaft nicht gelten. Daher ist $R(A) \neq \overline{R(A)}$ und das Problem inkorrekt nach Nashed.

Um die Aussage von Theorem 11 vollständig zu erhalten, zeigen wir nun noch dass die Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems vom Typ I ist also dass A nicht kompakt ist. Wir betrachten dazu eine in $L^2(0, 1)$ schwach gegen Null konvergente Folge die in $L^\infty(0, 1)$ nicht gleichmäßig beschränkt ist und deren Bildfolge $\{Ax_n\} \subset l^2$ nicht gegen das Nullelement in l^2 strebt. So eine Folge von Funktionen ist zum Beispiel

$$x_n(t) = \sqrt{nt^n}.$$

Das sieht man wie folgt: Die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t x_n(\tau) d\tau = 0$$

für alle $t \in [0, 1]$. Wir haben für diese Argumente aber offensichtlich

$$\left| \int_0^t \sqrt{n} \tau^n d\tau \right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} t^{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Weiter gilt $\|Ax_n\|_{l^2} \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ wegen

$$\begin{aligned} \|Ax_n\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{j-1} \sqrt{n} t^n dt \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+j} \right)^2 \\ &= n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\ &\geq n \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

da der letzte Ausdruck nicht gegen Null konvergiert. Wäre A kompakt, so müsste $x_n \rightarrow 0$ in $L^2(0, 1)$ nach Lemma 10 die Beziehung $Ax_n \rightarrow 0$ in l^2 implizieren. Dies ist aber nicht der Fall, womit die Behauptungen des Theorems 11 sämtlich gezeigt sind. \square

Wir wenden uns nun dem wichtigen Fall einer linearen Operatorgleichung (3.1) im Hilbertraum mit kompaktem Operator A zu, d.h. Inkorrektheit vom Typ II nach Nashed.

Beispiel 3.3 Wir kehren zurück zum Beispiel aus der Gravimetrie aus Übungsaufgabe 1.1. Dabei betrachten ein Flugzeug, das in Höhe 1 über ein Intervall der Länge L fliegt. Ziel ist die Bestimmung einer Anomalie der Massendichte. Für diese eindimensionale Aufgabe finden wir die Formel

$$\int_0^L ((s-t)^2 + 1)^{-3/2} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq L). \quad (3.13)$$

Für die Formulierung der Operatorgleichung wählen wir die Räume $X = Y = L^2(0, L)$ mit einem Operator wie in Formel (2.14) beschrieben. Es sei noch erwähnt, dass der Kern der Integralgleichung (3.13) nicht ausgeartet im

Sinne von Formel (3.9) ist, d.h. es gilt $\dim R(A) = \infty$. Der ausgeartete Fall würde eine Kerndarstellung

$$k(s, t) = \sum_{i=1}^m f_i(t)g_i(s)$$

erfordern, die sich hier nicht finden lässt. Da die Kernfunktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist, besitzt sie natürlich auch die Eigenschaft der quadratischen Integrierbarkeit $k \in L^2((0, L) \times (0, L))$. Dann ist der in diesem Beispiel betrachtete Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0, L), L^2(0, L))$ wegen Lemma 3 kompakt. Da aber die Injektivität des Operators nicht sofort erkennbar ist (siehe Aufgabe 3.3), lässt sich die vermutete Inkorrektheit von (3.13) im Sinne von $R(A) \neq \overline{R(A)}$ und damit die Verletzung der Stabilitätsbedingung nicht ohne weiteres schlussfolgern. Die nachfolgenden allgemeinen Betrachtungen zeigen jedoch, dass (3.13) inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist, ohne dass dafür die Injektivität von A benötigt wird. Grundlage dafür ist das folgende Lemma (siehe Engl S.152).

Lemma 11 *Die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger eines in Hilbertraum X und Y definierten kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\dim R(A) = \infty$ ist ein unbeschränkter und damit unstetiger linearer Operator.*

Als direkte Folge der Lemmata 9 und 11 erhalten wir den folgenden Satz, der die Situation vom Korrektheit und Inkorrektheit im Fall kompakter Operatoren umfassend beschreibt.

Theorem 12 *Im Falle eines kompakten Operators A ist die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y korrekt nach Nashed genau dann, wenn der Bildraum $R(A)$ des Operators A endlichdimensional ist. Anderenfalls, d.h. für kompaktes A und $\dim R(A) = \infty$ ist (3.1) inkorrekt nach Nashed vom Typ II.*

Als unmittelbare Folge aus diesem Theorem ergibt sich, dass die Integralgleichung (3.13) des Gravimetrieproblems aus Beispiel 3.3 inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist und damit die Stabilitätsbedingung (2.2) verletzt ist. Das letzte Theorem besagt aber viel mehr, nämlich dass alle linearen Fredholmschen

Integralgleichungen (2.12) mit nicht ausgearteten quadratisch integrierbarem Kern $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$ im Raumpaars $X = L^2(a, b)$ und $Y = L^2(c, d)$ unabhängig von der Erfüllung der Eindeutigkeitsbedingung instabil sind. Damit können beliebig kleine Fehler in den Datenfunktionen zu beliebig großen Abweichungen der erhaltenen Lösungsfunktionen führen.

3.1.5 Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren

Die Grundlage für die Untersuchung linearer Operatorgleichungen (3.1) mit kompakten Operatoren A bildet der im nächsten Lemma formulierte Polarzerlegungssatz. Wir verwenden hier die Formulierung von Baumeister (S.60-61).

Lemma 12 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter Operator, der zwischen den separablen Hilberträumen X und Y wirkt. Dann existieren eine Indexmenge $J = \{1, 2, \dots, m\}$ für den Fall $\dim R(A) = m$ bzw. $J = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ für den Fall $\dim R(A) = \infty$, Orthonormalsysteme $\{u_j\}_{j \in J}$ in X bzw. $\{v_j\}_{j \in J}$ in Y und eine Folge $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

$$\{\sigma_j\}_{j \in J} \text{ ist nicht wachsend, und es gilt } \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0 \text{ für } J = \mathbb{N}; \quad (3.14)$$

$$Au_j = \sigma_j v_j \quad (j \in J) \quad \text{und} \quad A^* v_j = \sigma_j u_j \quad (j \in J). \quad (3.15)$$

Für alle x in X gibt es ein Element $x_0 \in N(A)$ mit

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle_X u_j \quad \text{und} \quad Ax = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, u_j \rangle v_j. \quad (3.16)$$

Es gilt für alle $y \in Y$

$$A^* y = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle y, v_j \rangle_Y u_j. \quad (3.17)$$

Dieses Lemma besagt, dass es für einen kompakten Operator in jedem Fall ein singuläres System im Sinne folgender Definition gibt.

Definition Es seien X und Y separable Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter Operator. Dann heißt die zur Indexmenge J mit

$$J = 1, 2, \dots, m \text{ für } \dim R(A) = m$$

bzw.

$$J = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \text{ für } \dim R(A) = \infty$$

gehörende Tripelfolge

$$\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$$

singuläres System für A , wenn $\sigma_j > 0$ und $v_j \in Y$ wie im Lemma 12 definiert sind und die Bedingungen (3.14)-(3.17) erfüllen. Insbesondere heißen die Zahlen σ_j Singulärwerte von A . Weiterhin nennt man die in Formel (3.16) angegebene Zerlegung Singulärwertzerlegung des Operators.

Es sei vermerkt, dass

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sigma_1 \quad (3.18)$$

gilt und aus (3.15) sofort

$$A^* A u_j = \sigma_j^2 u_j \quad \text{sowie} \quad A A^* v_j = \sigma_j^2 v_j \quad (3.19)$$

folgen, d.h. die singulären Werte sind definiert als Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte λ_j sowohl des Operators $A^* A$ als auch $A A^*$. Die Orthonormalsysteme $\{u_j\}_{j \in J}$ bzw. $\{v_j\}_{j \in J}$ des singulären Systems sind im $\overline{R(A^*)}$ bzw. $\overline{R(A)}$ vollständige Orthonormalsysteme der Eigenelemente von $A^* A$ bzw. $A A^*$.

Unter Verwendung der gerade definierten singulären Systeme suchen wir nun Lösbarkeitseigenschaften und Lösungsdarstellungen zu linearen Operatorgleichungen (3.1) mit kompakten Operatoren. Unabhängig von der Korrektheit oder Inkorrektheit solcher Gleichungen, können ihre Lösungen mit Hilfe von Fourierreihen explizit ausgedrückt werden. Jede rechte Seite $y \in Y$ lässt sich nämlich darstellen als Fourierreihe

$$y = y_0 + \sum_{j \in J} \langle y, v_j \rangle_Y v_j \quad (3.20)$$

mit einem eindeutig bestimmten Element $y_0 \in N(A^*)$, wobei $\langle y_0, v_j \rangle_Y = 0$ für alle $j \in J$ gilt. Für die Lösung x in (3.1) verfügt man nun über die Darstellung (3.16). Damit erhält die Operatorgleichung (3.1) in Reihenform die Gestalt

$$\sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, u_j \rangle_X v_j = y_0 + \sum_{j \in J} \langle y, v_j \rangle_Y v_j. \quad (3.21)$$

Aus der Gleichung (3.21) folgt unmittelbar, dass $y_0 = 0$ bzw. damit gleichwertig $y \in N(A^*)^\perp$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (3.1)

darstellt. Um daraus aber eine hinreichende Bedingung zu erhalten, müssen zum einen zusätzlich die Gleichungen

$$\sigma_j \langle x, u_j \rangle_X = \langle y, v_j \rangle_X \text{ für alle } j \in J$$

zwischen den Fourierkoeffizienten von Lösung und rechter Seite gelten, zum anderen muss

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j \quad (3.22)$$

tatsächlich ein Element des Hilbertraums X repräsentieren. In der Darstellung (3.22), die alle potentielle Lösungen von (3.1) besitzen, bedeutet $x_0 \in N(A)$ ein beliebig gewähltes Nullraumelement. Dabei ist im Fall eines ausgearteten Operators A mit $J = \{1, 2, \dots, m\}$

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^m \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

stets ein Element aus X . Für alle $y \in Y$ stellt dann speziell

$$x_{mn} = A^\dagger y = \sum_{j=1}^m \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung dar. Interessanter ist der nichtausgertete Fall mit $\dim R(A) = \infty$ für welchen in der Darstellung (3.22) die Bedingung $x \in X$ der Picardschen Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2} < \infty \quad (3.23)$$

entspricht. Die Picardsche Bedingung, welche die Zugehörigkeit der Folge von Quotienten

$$\frac{\langle y, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2}$$

zum Raum l^2 fordert und die eine Konvergenzbedingung für die in (3.22) auftretende Fourierreihe darstellt, ist genau dann erfüllt, wenn

$$y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$$

gilt, also die Elemente y zum Definitionsbereich der Moore-Penrose-Inversen A^\dagger gehören. Wegen

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\sigma_j \langle x, u_j \rangle_X - \langle y, v_j \rangle_Y)^2 + \|y_0\|_Y^2$$

ist für die Elemente $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$

$$x_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j \quad (3.24)$$

Minimum-Norm-Lösung von (3.1). Die Moore-Penrose-Inverse besitzt für kompakte Operatoren A also im allgemeinen die Darstellung

$$A^\dagger y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j, \quad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp. \quad (3.25)$$

Theorem 13 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ in separablen Hilberträumen X und Y ein kompakter Operator mit dem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$. Die lineare Operatorgleichung (3.1) besitzt genau dann eine Lösung, wenn $y \in N(A^*)^\perp$ gilt und im Falle $\dim R(A) = \infty$ die Picardsche Bedingung (3.23) erfüllt ist. Alle Elemente x , die der Darstellung (3.22) genügen, sind dann Lösungen von (3.1). Für rechte Seiten $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ charakterisiert die Darstellung (3.22) genau die Elemente mit der kleinsten Defektnorm $\|Ax - y\|_Y$. Unter diesen Elementen ist dann mit $x_0 = 0$ die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ von (3.1) zu finden.*

Der über einen Operator vom Typ (3.9) beschriebene ausgeartete Fall der linearen Operatorgleichung (3.1) kann, wie wir gesehen haben, durch ein lineares Gleichungssystem (3.7) beschrieben werden. Wir verwenden in den Räumen $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ die Euklidische Norm und das entsprechende Skalarprodukt und bezeichnen mit $r = \text{rang}(A) \leq \min(m, n)$ den Rang der Matrix A . Dann existiert für die Matrix A ein singuläres System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}$ mit den singulären Werten

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

und zwei Orthonormalsysteme von Vektoren

$$\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \{v_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m,$$

so dass die Beziehungen

$$Au_j = \sigma_j v_j, \quad A^* v_j = \sigma_j u_j \quad (j = 1, 2, \dots, r) \quad (3.26)$$

gelten und eine Singulärwertzerlegung der Matrix A existiert in Form des Matrizenproduktes

$$A = V \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) U^T \quad (3.27)$$

mit den orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Für orthogonale Matrizen, deren Zeilen und Spalten zueinander paarweise orthogonal sind gilt bekanntlich $U^T = U^{-1}$. Aus der Singulärwertzerlegung (3.27) der Matrix A mit $\text{rang}(A) = r$ lässt sich unmittelbar die Pseudoinverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A^\dagger = U \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_r} & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) V^T \quad (3.28)$$

als spezielle Moore-Penrose-Inverse für diese endlichdimensionale Situation ableiten. In Verallgemeinerung zum Vollrangfall $\text{rang}(A) = n$ kann man damit die Minimum-Norm-Lösung eines allgemeinen linearen Gleichungssystems (3.7) mit $\text{rang}(A) = r \leq \min(m, n)$ in der Form

$$x_{mn} = A^\dagger y = \sum_{j=1}^r \frac{\langle y, v_j \rangle}{\sigma_j} u_j \quad (3.29)$$

schreiben. Aus den obigen Überlegungen zur Singulärwertzerlegung von Matrizen A folgt für die Spektralnorm die Darstellung

$$\text{cond}(A) = \|A\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \|A^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

der Konditionszahl.

Wir setzen in den nun folgenden Betrachtungen dieses Abschnitts voraus, dass $\dim(A) = \infty$ gilt, d.h. dass A nicht ausgeartet ist. Eine besonders wichtige Klasse solcher Operatoren bilden Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Definition: Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt Hilbert-Schmidt-Operator, wenn für ein in X vollständiges Orthonormalsystem $\{e_j\} \subset X$ gilt:

$$S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|_Y^2 < \infty \quad (3.30)$$

Lemma 13 *Hilbert-Schmidt-Operatoren A sind stets kompakt und erfüllen für alle in X vollständigen Orthonormalsysteme $\{e_j\}$ die Beziehung*

$$S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty.$$

Als Konsequenz aus diesem Lemma erhalten wir, dass für einen Hilbert-Schmidt-Operator die Summe $S(A)$ unabhängig ist von der Wahl des Orthonormalsystems $\{e_j\}$. Man kann darüber hinaus zeigen, dass ein kompakter Operator genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, wenn die Folge $\{\sigma_j\}$ seiner Singulärwerte quadratisch summierbar ist, also ein Element im Raum l^2 bildet.

Die linearen Fredholmschen Integraloperatoren A vom Typ (2.14) in den Räumen $X = L^2(a, b)$ und $Y = L^2(c, d)$ mit quadratisch integrierbarem Kern $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$ sind Hilbert-Schmidt-Operatoren, wobei die Beziehungen

$$S(A) = \int_c^d \int_a^b (k(s, t))^2 dt ds = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

und im Falle eines von der Nullfunktion verschiedenen Kerns

$$k(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j u_j(t) v_j(s) \quad (3.31)$$

gelten, wenn $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein singuläres System von A bezeichnet. Die Konvergenz dieser Reihe ist im Sinne des Raumes $L^2((c, d) \times (a, b))$ zu verstehen.

Wir wollen uns nun die Gestalt singulärer Systeme am Beispiel verdeutlichen. Dazu betrachten wir den kompakten Operator aus Beispiel 2.1

$$(Ax)(s) = \int_0^s x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.32)$$

im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$. Wendet man die im Abschnitt 3.1.2 eingeführte Gleichung zur Definition des adjungierten Operators A^* an, so lässt sich die Darstellung

$$(A^*y)(t) = \int_t^1 y(s) ds \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und schließlich

$$(A^*Ax)(\tau) = \int_\tau^1 \int_0^s x(t) dt ds.$$

finden. Die Eigenwertgleichung $A^*Au = \lambda u$ führt auf das Randwertproblem

$$-u(t) = \lambda u''(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad u(1) = u'(0) = 0, \quad \|u\|_{L^2(0,1)} = 1,$$

dessen Lösungen

$$\lambda_j = \frac{4}{(2j-1)^2\pi^2}, \quad u_j = \sqrt{2} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

die singulären Werte

$$\sigma_j = \frac{2}{(2j-1)\pi} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.33)$$

liefern. Man sieht wegen $\{\sigma_j\} \in l^2$ sofort, dass A ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Mit

$$v_j(t) = \frac{1}{\sigma_j} (Au_j)(t) = \sqrt{2} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi t$$

erhält man das singuläre System

$$\left\{ \frac{2}{(2j-1)\pi}; \sqrt{2} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi t; \sqrt{2} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right) \pi t \quad (0 \leq t \leq 1) \right\}_{j=1}^{\infty}$$

für den Operator (3.32). Die dabei auftretenden Orthonormalsysteme $\{u_j\}$ und $\{v_j\}$ sind vollständig in $L^2(0, 1)$. Man erkennt, dass die Eigenfunktionen u_j und v_j umso stärker oszillieren, je größer j und damit je kleiner der Wert σ_j ausfällt. Die Situation, dass Singulärwerte nahe Null zu hochfrequenten Eigenfunktionen gehören, ist typisch für das Verhalten großer Klassen kompakter Operatoren im Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel eines Hilbert-Schmidt-Operators, dessen Singulärwerte σ_j für $j \rightarrow \infty$ exponentiell, also extrem schnell gegen Null

streben. Im Fall des Operators (3.32) hatte die Singulärwertfolge ein Verhalten wie $1/j$. Die Bedeutung dieser Abklingraten wird uns im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit dem Grad der Inkorrektheit einer linearen Operatorgleichung (3.1) beschäftigen.

Beispiel 3.4 Zu den klassischen inversen Problemen gehört die Aufgabe der Rekonstruktion des Anfangstemperaturprofils $x(\rho)$ ($0 \leq \rho \leq 1$) eines homogenen Stabes der Länge 1, dessen von der Ortskoordinate ρ und der Zeitkoordinate t abhängigen Temperaturen $u(\rho, t)$ dem Anfangs-Randwertproblem zur eindimensionalen Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\rho, t)}{\partial \rho^2} \quad (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq 1)$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(\rho, 0) = x(\rho) \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

genügen, aus Messungen

$$y(\rho) = (Ax)(\rho) := u(\rho, 1) \quad (0 \leq \rho \leq 1) \quad (3.34)$$

des Temperaturprofils des Stabes zur Erdzeit $t = 1$. Der in (3.34) definierte Operator A ist in $X = Y = L^2(0, 1)$ linear und kompakt. Funktionen u , die der Differentialgleichung und den Randbedingungen genügen, lassen sich als Reihe

$$u(\rho, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-j^2 \pi^2 t) \sin j \pi \rho$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten c_j darstellen. Daraus resultiert das singuläre System

$$\{\exp(-j^2 \pi^2); \sqrt{2} \sin j \pi \rho \ (0 \leq \rho \leq 1); \sqrt{2} \sin j \pi \rho \ (0 \leq \rho \leq 1)\}_{j=1}^{\infty}$$

des Operators A aus (3.34). Dieser Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ ist selbstadjungiert und injektiv. Er lässt sich als Hilbert-Schmidt-Operator in Form eines Integraloperators

$$(Ax)(\rho) = \int_0^1 k(\rho, \eta) x(\eta) d\eta \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

mit der Formel (3.31) entsprechenden Reihendarstellung

$$k(\rho, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} 2 \exp(-j^2 \pi^2) \sin j\pi\rho \sin j\pi\eta \quad (0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1)$$

der Kernfunktion schreiben. Die Kernfunktion $k(.,.)$ verkörpert dabei die Greensche Funktion des entsprechenden Anfangswertproblems zur Wärmeleitgleichung.

3.1.6 Der Grad der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen

Bisher haben wir uns ausführlich mit der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen (3.1) beschäftigt. Dabei haben wir niemals die Frage gestellt, wie stark inkorrekt solche Identifikationsprobleme sind. Die gut strukturierte Klasse injektiver, kompakter Operatoren in Hilberträumen X und Y erlaubt Antworten auf diese weitergehende Fragen.

Diese Fragestellung ist stark durch numerische Untersuchungen motiviert. Es zeigt sich, dass solche Aufgaben ganz unterschiedliche numerische Schwierigkeiten generieren. Der Computer kann natürlich nur mit diskretisierten Problemen arbeiten. Wir gehen daher von einem endlichdimensionalen Raum X aus und von einem vollständigen Orthonormalsystem

$$X_n := \text{span} (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Unter der näherungsweise numerischen Lösung wollen wir die Konstruktion eines Elements $x_n \in X_n$ verstehen, welches Lösung des auf den Teilraum X_n eingeschränkten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|Ax - y\|_Y = \min !, \quad x \in X_n \quad (3.35)$$

ist. Aus den Überlegungen von Abschnitt 3.1.4 folgt, dass

$$x = A_n^\dagger y$$

für alle $y \in Y$ die in X_n wegen der Injektivität von A eindeutig bestimmte Lösung bildet. Dabei stellt $A_n^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X_n)$ die Moore-Penrose-Inverse des

Operators $A_n \in \mathcal{L}(X_n, Y)$ dar, der mittels der Vorschrift $A_n x = Ax$ für $x \in X_n$ als Einschränkung von A auf X_n definiert wird.

Es sei nun $x_0 \in X$ die für eine feste rechte Seite y_0 eindeutig bestimmte Lösung von (3.1). Wir betrachten den Fehler einer Näherungslösung $\|x_n^\delta - x_0\|_X$ einer Näherungslösung

$$x_n^\delta = A_n^\dagger y_\delta$$

zu einer gestörten rechten Seite y_δ mit $\|y - y_\delta\|_Y \leq \delta$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir dafür

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|x_n^\delta - x_n\|_X + \|x_n - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \|y_\delta - y\|_Y + \|A_n^\dagger y - x_0\|_X$$

und damit

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \delta + \|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X. \quad (3.36)$$

Die Schranke für den Fehler der Näherungslösung x_n^δ im Sinne der rechten Seite zerfällt in zwei Terme. Der erste Term $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \delta$ charakterisiert die *Stabilität* der Näherungslösung in Bezug auf Störungen in den Daten. Der zweite Term $\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X$ beschreibt die Approximationseigenschaften von x_0 durch geeignete Elemente aus X_n . Bei geschickter Wahl des Orthonormalsystems strebt dieser Wert gegen Null für $n \rightarrow \infty$. Wählt man $\{w_j\} = \{u_j\}$ mit $\{u_j\}$ aus dem singulären System von A , so gilt für $y = Ax_0$

$$A_n^\dagger y = \sum_{j=1}^n \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j = \sum_{j=1}^n \langle x_0, u_j \rangle_X u_j$$

und damit

$$\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X = \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle x_0, u_j \rangle_X^2} \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

Um den Approximationsfehler klein zu halten, empfiehlt es sich also bei der numerischen Lösung von (3.1) die Dimension n so groß wie möglich zu wählen. Die Inkorrektheit nach Nashed ist aber, wie Theorem 10 gezeigt hat, immer mit Instabilität verbunden. Diese kommt in der Abschätzung (3.36) durch $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$ zum Ausdruck. Dieser Faktor wird mit dem Datenfehler multipliziert. Im nächsten Lemma sehen wir, dass dieser Ausdruck mit $n \rightarrow \infty$ auch gegen unendlich strebt. Je größer n gewählt wird, desto

stärker wirken sich die Datenfehler in der Näherungslösung aus. Diese widersprüchlichen Tendenzen kann man praktisch durch Wahl eines “mittleren Diskretisierungsniveaus“ n handhaben, welches einen Kompromiss zwischen Approximation und Stabilität darstellt.

Lemma 14 *Bei beliebiger Wahl des die Teilräume X_n generierenden Orthonormalsystems $\{w_j\}$ gilt für*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \left(\min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right)^{-1} \quad (3.38)$$

die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \infty.$$

Die Aussage dieses Lemmas folgt aus der Tatsache, dass für die unbeschränkte Inverse A^{-1} eines injektiven kompakten Operators A eine unendliche Folge $\{z_j\} \subset X$ existiert mit $z_j \neq 0$ und

$$\frac{\|Az_j\|_Y}{\|z_j\|_X} \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

Wäre nun die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \infty.$$

verletzt, so gäbe es unter Berücksichtigung der Darstellung (3.38) eine Folge von Dimensionen n_i und eine Konstante $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in X_{n_i}$ die Ungleichung

$$\|Az\|_Y \geq \varepsilon \|z\|_X$$

gilt. Die n_i -dimensionalen Approximationen $z_j^{n_i} = \sum_{l=1}^{n_i} \langle z_j, w_l \rangle_X w_l$ erfüllen dann für alle i und j die Bedingung

$$\|Az_j^{n_i}\|_Y \geq \varepsilon \|z_j^{n_i}\|_X$$

und mit $\lim_{i \rightarrow \infty} \|z_j^{n_i} - z_j\|_X = 0$ die Ungleichung

$$\|Az_j\|_Y \geq \varepsilon \|z_j\|_X.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Grenzwertbeziehung (3.39).

Sucht man nach Teilräumen X_n , die den ‘‘Instabilitätsfaktor‘‘ $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$ in der rechten Seite möglichst klein halten, so leistet dafür das im nächsten Lemma formulierte Maximum-Minimum-Prinzip von Poincaré und Fischer gute Dienste.

Lemma 15 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter linearer Operator in separablen Hilberträumen X und Y mit einem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$. Dann gilt für alle $n \in J$*

$$\sigma_n = \max_{X_n \subset X} \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \min_{x \in \text{span}(u_1, u_2, \dots, u_n) \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|Au_n\|_Y \quad (3.40)$$

Dabei ist das Maximum in Formel (3.40) über alle n -dimensionalen Teilräume X_n des Hilbertraums X zu nehmen.

Daraus ergibt sich wegen Formel (3.38) sofort:

Folgerung 7 *Die Norm $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$ wird bezüglich aller n -dimensionalen Teilräume X_n von X minimal für $X = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$, d.h., es gilt*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} \geq \frac{1}{\sigma_n} \text{ und } \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)} = \frac{1}{\sigma_n} \text{ für } X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n). \quad (3.41)$$

Wählt man die Teilräume X_n optimal als erste n Elemente des singulären Systems, so verhält sich die Näherungslösung im Sinne der Abschätzung (3.36) am stabilsten gegenüber Datenstörungen. Die Kehrwerte der singulären Werte spielen dann die Rolle der ‘‘Instabilitätsfaktoren‘‘. Je schneller die Folge $\{\sigma_n\}$ der Singulärwerte gegen Null strebt, umso schneller wächst der Multiplikator $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y, X_n)}$ selbst im besten Falle gegen unendlich. So macht es Sinn, den Grad der Inkorrektheit einer Operatorgleichung (3.1) über die Abklingrate der Singulärwertfolge des Operators A gegen Null zu definieren.

Definition: Wir bezeichnen eine lineare Operatorgleichung (3.1) mit kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ in separablen Hilberträumen X und Y als

höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$, wenn für die Singulärwertfolge $\{\sigma_n\}$ des Operators A eine Konstante $\overline{C} > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{\sigma_n} \leq \overline{C}n^\nu \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.42)$$

Analog bezeichnen wir eine solche Gleichung als mindestens inkorrekt vom Grad $\nu > 0$, wenn eine Konstante \underline{C} existiert mit

$$\frac{1}{\sigma_n} \geq \underline{C}n^\nu \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.43)$$

Haben wir beide Ungleichungen, d.h., es gilt $\sigma_n \sim n^{-\nu}$, so nennen wir die positive Zahl ν Grad der Inkorrektheit. Die Proportionalität entspricht also der Existenz zweier Konstanten $0 < \underline{C} \leq \overline{C} < \infty$ mit

$$\underline{C}n^\nu \leq \frac{1}{\sigma_n} \leq \overline{C}n^\nu \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.44)$$

Gilt für jedes positive ν eine Ungleichung (3.43), so sagen wir, dass der Grad der Inkorrektheit unendlich ist. Wenn eine Operatorgleichung höchstens inkorrekt vom Grade 1 ist, so nennt man sie auch schwach inkorrekt. Man spricht von mäßig inkorrekten Gleichungen, wenn es eine endliche Zahl ν gibt, so dass (3.42) gilt, anderenfalls heißen solche Gleichungen stark inkorrekt. Je höher der Grad der Inkorrektheit einer inversen Aufgabe (3.1) ausfällt, desto kleiner muss man die Diskretisierungsdimension n in (3.35) wählen, um bei festem Datenfehlerniveau $\delta > 0$ noch einen akzeptablen Fehler (3.36) der Näherungslösung x_n^δ abzusichern. Daraus kann man folgende Interpretation ableiten: Will man ein fest vorgegebenes Fehlerniveau der Näherungslösung nicht überschreiten, so kann man bei stark inkorrekten Aufgaben nur eine sehr kleine Anzahl n von Parameterwerten aus den gegebenen fehlerhaften Daten rekonstruieren. Bei schwach inkorrekten Aufgaben fällt diese Anzahl deutlich höher aus. Im Kapitel 4 werden wir mit Hilfe von Regularisierungsverfahren danach streben, auch bei stärker inkorrekten Aufgaben eine größere Anzahl von Parametern näherungsweise zu ermitteln. Bei der Regularisierung und auch bei der Auswahl numerischer Verfahren spielt der Grad der Inkorrektheit eine wesentliche Rolle.

Im vorigen Abschnitt haben wir im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$ bereits für den Operator aus (3.32) (Identifikation der ersten Ableitung) die Singulärwertfolge (3.33) bestimmt. Für diese gilt offensichtlich

$$\sigma_n \sim n^{-1}.$$

Wir haben es beim Differentiationsproblem also mit einem Grad $\nu = 1$ der Inkorrektheit zu tun. Wir sind damit genau an der Grenze zwischen schwach und mäßig inkorrekten Problemen. Im Beispiel 3.4 haben wir für das Wärmeleitproblem mit Zeitumkehr die Singulärwertfolge

$$\sigma_n = \exp(-n^2\pi^2)$$

ermittelt. Dieses in Operatorgleichung (3.34) formulierte inverse Problem ist daher stark inkorrekt und sein Grad der Inkorrektheit ist unendlich, da die Folge der Singulärwerte schneller fällt als jede Potenz $n^{-\nu}$ für endliches positives ν .

Beispiel 3.5 In diesem Beispiel betrachten wir im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$ die für reelle Zahlen $r > 0$ definierte Familie

$$(A_r x)(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^{r-1}}{\Gamma(r)} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.45)$$

von speziellen linearen Integraloperatoren A_r der gebrochenen Integration. Dabei bezeichnet $\Gamma(r)$ die Gammafunktion zum Argument r . Die Familie (3.45) gehört zu den linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art

$$\int_0^s k(s, t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.46)$$

einer Teilklasse der linearen Fredholmschen Integralgleichungen erster Art

$$\int_0^1 k(s, t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (3.47)$$

wobei die im Quadrat $(0, 1) \times (0, 1)$ definierte Kernfunktion k bei den Volterraschen Integralgleichungen im Dreieck $\{(s, t) : 0 \leq s < t \leq 1\}$ identisch verschwindet. Unter den linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art gehört die Familie (3.45) wiederum zu den linearen Faltungsgleichungen

$$\int_0^s k(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.48)$$

deren Kernfunktionen k nur von der Differenz der Argumente s und t abhängen. Die Bezeichnung "gebrogene Integration" im Zusammenhang mit dem Operator A_r lässt sich damit begründen, dass (3.45) für natürliche Zahlen $r = l$ in der Form

$$\int_0^s \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.49)$$

dem Problem der Identifikation der l -ten Ableitung $x(t) = y^{(l)}(t)$ einer Funktion $y(t)$ aus Werten der Funktion entspricht. Dabei gibt es stetige Lösungen x von (3.49) natürlich nur für l -mal stetig differenzierbare Funktionen $y \in C^l[0, 1]$ mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = \dots = y^{(l-1)}(0) = 0.$$

Die Gleichung (3.45) lässt sich als Verallgemeinerung dieses Problems (3.49) der l -maligen Differentiation auffassen. Man kann daher von der Identifikation von Ableitungen einer gebrochenen Ordnung r sprechen.

Für den Zahlenbereich $0 < r < 1$ wird (3.45) als Abelsche Integralgleichung bezeichnet, für die es zahlreiche Anwendungen bei inversen Problemen z.B. der Mechanik, Stereologie und Geophysik gibt. Eine Zusammenstellung dieser Anwendungen zur Theorie Abelscher Integralgleichungen findet man im Buch von Gorenflo und Vessella. Bei solcher Wahl des Parameters r sind im Gegensatz zum Fall $r \geq 1$ die Kernfunktionen des Integraloperators A_r nicht mehr stetig, sondern schwach singular, d.h. sie weisen für $s = t$ auf der Diagonale des Quadrats $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ eine Polstelle auf, die aber in dem Sinn schwach ausgeprägt ist, dass die entsprechenden Kernfunktionen k in der Variante (3.48) die Darstellung

$$k(\tau) = \frac{1}{\tau^{1-r}} \quad (0 \leq \tau \leq 1)$$

besitzt, die für $0 < r < 1$ integrierbar ist und somit zum Raum $L^1(0, 1)$ gehört. Aus der Youngschen Ungleichung ergibt sich für $x \in L^2(0, 1)$ und $k \in L^1(0, 1)$ aber $Ax \in L^2(0, 1)$ mit A aus (3.48) und es gilt eine Abschätzung

$$\|Ax\|_{L^2(0,1)} \leq \|k\|_{L^1(0,1)} \|x\|_{L^2(0,1)}.$$

Daher haben wir in (3.45) für alle $r > 0$ einen beschränkten linearen Operator $A_r \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ vorliegen, der auch kompakt ist. Aber nur für $r > 1/2$ ist der Kern des Integraloperators quadratisch integrierbar und damit A_r ein Hilbert-Schmidt-Operator. Allgemein lässt sich für die Singulärwerte von A_r in $L^2(0, 1)$ zeigen, dass

$$\sigma_n \sim n^{-r} \quad \text{für alle } r > 0$$

gilt. Das Problem (3.49) der l -maligen Differentiation ist also vom Inkorrektheitsgrad l und damit mäßig inkorrekt, wobei mit wachsendem Differentiationsniveau l die Schwierigkeiten der Aufgabe steigen. Dagegen ist die Abelsche Integralgleichung mit einem Grad $0 < r < 1$ nur schwach inkorrekt.

Beispiel 3.6 Lineare Faltungsgleichungen

$$\int_0^s k(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq T) \quad (3.50)$$

als Spezialfall Volterrascher Integralgleichungen erster Art treten bei der Interpretation indirekter Messungen auf, wenn die Werte $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) einer von der Zeit abhängigen Größe aus den gemessenen Werten $y(s)$ ($0 \leq s \leq T$) der Faltung

$$\int_0^s k(s-t)x(t) dt$$

der Funktion x mit einer Kernfunktion k bestimmt werden sollen. Die Kernfunktion als Apparatfunktion definiert den inneren Mechanismus der Messung, wobei nur Werte $x(t)$ ($0 \leq t \leq s$) aus der Vergangenheit den Messwert $y(s)$ zum aktuellen Zeitpunkt s beeinflussen. Diese Situation ist typisch für Evolutionsgleichungen.

Anwendungen für dieses Modell gibt es sehr viele. So kann zum Beispiel bei der Fluoreszenzspektroskopie die Funktion x die innere Struktur komplexer Strukturen beschreiben und y die meßbare Fluoreszenzreaktion. In der Nuklearmedizin steht die Funktion x für die Funktionstüchtigkeit innerer Organe. Gemessen wird die Substratmenge y gewisser schwach radioaktiver Substanzen. Die Verarbeitung dieser Stoffe gibt Aufschluss darüber, ob eine Stoffwechselstörung vorliegt. Die Kernfunktion beschreibt hier die Verarbeitungsraten für die jeweilige Substanz im Körper. Eine dritte Anwendung findet sich in der Geophysik bei der Modellierung von Untergrundgasspeichern. Man misst den zeitlich veränderlichen Gasdruck y und möchte Aussagen über das "Speichergedächtnis" x gewinnen.

Wir betrachten daher nun den linearen Faltungsoperator

$$(Ax)(s) = \int_0^s k(s-t)x(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.51)$$

im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$. Dazu nehmen wir an, dass die Kernfunktion k den Bedingungen

$$k \in L^2(0, 1) \quad \text{und} \quad \sup\{s : k(\tau) = 0 \text{ für fast alle } \tau \in [0, s]\} = 0 \quad (3.52)$$

genügt. Der quadratisch integrierbare Kern k impliziert die Zugehörigkeit von A zur Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren. Weiter ist gefordert, dass

die Kernfunktion in der Nähe der Null nicht identisch verschwindet. Diese zweite Bedingung in (3.52) sichert die Injektivität von A und damit die Eindeutigkeit von Lösungen der Faltungsgleichung. Diese Aussage liefert der Satz von Titchmarsh, der hier als Lemma formuliert ist:

Lemma 16 *Es seien $f \in L^2(0, 1)$ und $g \in L^2(0, 1)$ zwei Funktionen und $\gamma \in (0, 1]$ eine positive reelle Zahl, so dass*

$$\int_0^s f(s-t)g(t) dt = 0 \quad \text{für fast alle } s \in [0, \gamma]$$

gilt. Dann existieren Zahlen $\alpha, \beta \in [0, 1]$ mit $\alpha + \beta \geq \gamma$ und $f(t) = 0$ für fast alle $t \in [0, \alpha]$ sowie $g(t) = 0$ für fast alle $t \in [0, \beta]$.

Gilt nun für den Faltungsoperator (3.51) $Ax = 0$ in $L^2(0, 1)$ und für kein $0 < \varepsilon \leq 1$ die Beziehung $k(\tau) = 0$ für fast alle $\tau \in [0, \varepsilon]$, so muss wegen des Lemmas $x(t) = 0$ sein für fast alle $t \in [0, 1]$. Somit gilt $x = 0$ in $L^2(0, 1)$ und der Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), L^2(0, 1))$ erweist sich als injektiv. Vorstellungen über den Grad der Inkorrektheit liefert das folgende Theorem:

Theorem 14 *Im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$ ist jede Operatorgleichung (3.1) mit einem linearen Faltungsoperator (3.51), dessen Kern k der Bedingung (3.52) genügt, mindestens inkorrekt vom Grad $\nu = 1/2$. Ist für eine positive ganze Zahl l der Kern darüber hinaus $(l-1)$ -mal stetig differenzierbar und besitzt eine quadratisch integrierbare l -te Ableitung, d.h. es gilt*

$$k \in C^{l-1}[0, 1] \quad \text{und} \quad k^{(l)} \in L^2(0, 1), \quad (3.53)$$

so ist die Gleichung sogar mindestens inkorrekt vom Grade $\nu = l + 1/2$, wenn zusätzlich für die Ableitungen des Kerns die Bedingung

$$k(0) = k'(0) = \dots = k^{(l-1)}(0) = 0 \quad (3.54)$$

erfüllt ist.

Sind $k \in C^{l-1}[0, 1]$ und (3.54) für beliebig große Zahlen l erfüllt, so hat die Faltungsgleichung den Inkorrektheitsgrad unendlich. Je glatter der Kern wird, desto größer fällt der Grad der Inkorrektheit aus. Dies deckt sich mit

der gerade gewonnenen Erkenntnissen aus Beispiel 3.5, wo im Falle der Abel-schen Integralgleichungen mit einer Polstelle im Kern die kleinsten Inkorrekttheitsgrade festgestellt wurden. Die mit wachsendem l zunehmend glatter werdenden Kerne waren von wachsenden Inkorrekttheitsgraden begleitet. Allerdings wachsen die Inkorrekttheitsgrade nur dann an, wenn im Sinne von (3.54) immer höhere Ableitungen an der Stelle $t = 0$ verschwinden. Dies ist auch eine Glattheitsforderung, aber jetzt an den Kern

$$k(s, t) = \begin{cases} k(s-t) & (0 \leq t \leq s \leq 1) \\ 0 & (0 \leq s < t \leq 1) \end{cases}$$

des zugehörigen Fredholmschen Integraloperators (2.14) mit $a = c = 0$ und $b = d = 1$ beim Übergang über die Diagonale $s = t$ des Quadrats $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Theorem 15 *Wir betrachten im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$ die lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art*

$$(Ax)(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.55)$$

mit $k \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$. Dann gilt für die Singulärwerte des Operators A

$$\sigma_n \leq C(n)n^{-1/2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = 0.$$

Falls darüber hinaus die Funktionen

$$k, \frac{\partial k}{\partial s}, \frac{\partial^2 k}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial^{l-2} k}{\partial s^{l-2}}$$

stetig in s sind für fast alle t und

$$\frac{\partial^{l-1} k}{\partial s^{l-1}} = \int_0^s g(t, \tau) d\tau + h(t)$$

mit $g \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$ und $h \in L^1(0, 1)$ gilt, so haben wir sogar

$$\sigma_n \leq C(n)n^{-(l+1/2)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = 0. \quad (3.56)$$

Offenbar ist Theorem 14 eine direkte Konsequenz von Theorem 15. Als Literatur in Bezug auf Theorem 15 sei das Buch von Engl empfohlen. Ist bei Faltungsgleichungen die sehr einschneidende Forderung (3.54) nicht erfüllt, so liegt der Inkorrekttheitsgrad niedriger. Deshalb kann man allgemein davon ausgehen, dass bei vergleichbaren Differentiationseigenschaften des Kernes Volterrasche Integralgleichungen weniger inkorrekt als Fredholmsche Integralgleichungen sind, falls nicht zusätzlich alle Werte der Kernfunktion $k(s, t)$ und ihre sämtlichen Ableitungen bis zur höchsten Ordnung für $s = t$ verschwinden. Die Beziehung (3.54) charakterisiert gerade so einen Ausnahmefall für die Faltungsgleichung.

Unmittelbar aus Theorem 15 erhalten wir für Fredholmsche Integralgleichungen (3.47) eine Folgerung über den Inkorrekttheitsgrad in Abhängigkeit von der Kernglattheit.

Folgerung 8 *Eine lineare Fredholmsche Integralgleichung (3.47) mit $k \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$ ist mindestens inkorrekt vom Grad $1/2$. Unter den in Theorem 15 formulierten Glattheitsbedingungen an die Kernfunktion k ist die Gleichung (3.47) sogar mindestens inkorrekt vom Grad $\nu = l + 1/2$.*

Es sei noch erwähnt, dass man aus der Kernglattheit keine Informationen darüber erhält, welchen Inkorrekttheitsgrad eine solche Integralgleichung höchstens aufweist.

Falls die Singulärwerte $\{\sigma_n\}$ eines kompakten linearen Operators $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bzw. deren Abklingraten und damit der Grad der Inkorrektheit nicht unmittelbar verifizierbar sind, so kann man versuchen, den Operator A mit Hilfe eines anderen Operators $B \in \mathcal{L}(X, Z)$ (X, Y, Z separable Hilberträume) in der Form

$$\underline{c}\|Bx\|_Z \leq \|Ax\|_Y \leq \bar{c}\|Bx\|_Z \quad \text{für alle } x \in X \quad (3.57)$$

und Konstanten $0 < \underline{c} \leq \bar{c} < \infty$ abzuschätzen, wenn die Singulärwertfolge $\{\tilde{\sigma}_n\}$ des Operators B oder wenigstens deren Abklingraten bekannt sind. Wegen Lemma 15 folgen dann aus (3.57) und (3.40) die Ungleichungen

$$\underline{c}\tilde{\sigma}_n \leq \sigma_n \leq \bar{c}\tilde{\sigma}_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.58)$$

Ein Inkorrekttheitsgrad ν von B überträgt sich auf den Operator A und umgekehrt (siehe Aufgabe 3.4). Wir demonstrieren diese Vorgehensweise am

Beispiel des Operators aus (3.32) im Sobolevraum $X = Y = H^1(0, 1)$. Für das Differentiationsproblem

$$\int_0^s x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.59)$$

wissen wir aus Abschnitt 3.1.5, dass bei Betrachtung von Lösungen x und rechten Seiten y im Raum $L^2(0, 1)$ der Inkorrektheitsgrad $\nu = 1$ auftritt. Um den entsprechenden Inkorrektheitsgrad im Sobolevraum $H^1(0, 1)$ zu bestimmen, betrachten wir $A \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), H^1(0, 1))$ als den zu (3.59) gehörigen Operator und nutzen die Definition der Sobolevnorm

$$\|Ax\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^s x(t) dt \right)^2 ds + \int_0^1 (x(t))^2 dt} = \sqrt{\|Ax\|_{L^2(0,1)}^2 + \|x\|_{L^2(0,1)}^2}.$$

Wegen (3.18) und (3.33) ergibt sich daraus

$$\|x\|_{L^2(0,1)} \leq \|Ax\|_{H^1(0,1)} \leq \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} \|x\|_{L^2(0,1)} \quad \text{für alle } x \in H^1(0, 1) \quad (3.60)$$

eine Ungleichung vom Typ (3.57). Dabei haben wir $Z = L^2(0, 1)$, $\underline{c} = 1$, $\bar{c} = \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}}$ und einen Operator $B \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), L^2(0, 1))$ mit $Bx = x$ für alle $z \in H^1(0, 1)$, der die Einbettung des Raumes $H^1(0, 1)$ in den Raum $L^2(0, 1)$ beschreibt. Nun lässt sich für diesen kompakten Einbettungsoperator B das singuläre System mit den Komponenten

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{1 + (j-1)^2\pi^2}} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

$\tilde{u}_1 \equiv 1$, $\tilde{u}_j = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+(j-1)^2\pi^2}}} \cos(j-1)\pi t$ und $\tilde{v}_1 \equiv 1$, $\tilde{v}_j = \sqrt{2} \cos(j-1)\pi t$ explizit aufschreiben. Damit haben wir eine Abklingrate $\tilde{\sigma}_n \sim n^{-1}$ der Singulärwerte von B . Demzufolge gibt es Konstanten $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ mit

$$\frac{c_1}{n} \leq \sigma_n \leq \frac{c_2}{n}$$

für die Singulärwertfolge $\{\sigma_n\}$ von $A \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), H^1(0, 1))$. Das Differentiationsproblem (3.59) ist also auch im Raum $H^1(0, 1)$ inkorrekt vom Grad $\nu = 1$.

3.2 Nichtlineare Operatorgleichungen und ihr lokales Korrektheitsverhalten in Hilberträumen

Im Kapitel 2 haben wir uns mit lokaler Korrektheit und Inkorrektheit von Identifikationsproblemen

$$F(x) = y \quad x \in D \subset X, y \in Y \quad (3.61)$$

in Banachräumen beschäftigt. Wir wollen diese Diskussion nun weiter verfolgen unter der Annahme dass X und Y Hilberträume sind. Dazu werden jetzt einige Begriffe zur genauen Charakterisierung nichtlinearer Operatoren F bereitgestellt.

3.2.1 Einige weitere Begriffe zu nichtlinearen Operatoren

Die Kompaktheit eines nichtlinearen Operators F kann völlig zu der im linearen Fall definiert werden: Ein Operator, der beschränkte Mengen in relativ kompakte abbildet, heißt kompakt. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Operatoren ist die schwache Abgeschlossenheit.

Definition: Ein nichtlinearer Operator $F : X \supset D \rightarrow Y$, der zwischen Hilberträumen X und Y wirkt, heißt schwach abgeschlossen, wenn für $\{x_n\} \subset D$ die schwache Konvergenz der Folgen $x_n \rightharpoonup x_0$ in X $F(x_n) \rightharpoonup y_0$ in Y die Beziehungen $x_0 \in D$ und $F(x_0) = y_0$ nach sich ziehen.

Lemma 17 *Falls der schwach abgeschlossene Operator $F : X \supset D \rightarrow Y$ auf $S \subset D$ kompakt ist, so transformiert F schwach konvergente Folgen $x_n \rightharpoonup x_0$ in X mit $\{x_n\} \subset S$ in stark konvergente Folgen $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ in Y .*

Um nichtlineare Operatoren in Tayloreihen entwickeln zu können, wie wir es bei Funktionen reeller Veränderlicher gewöhnt sind, benötigen wir den Begriff der Ableitung des Operators F im Punkt $x_0 \in D$. Wir betrachten

zwei verschiedene Varianten einer solchen Ableitung, die Fréchet-Ableitung und die Gâteaux-Ableitung.

Definition: Ein beschränkter linearer Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt Fréchet-Ableitung des Operators $F : X \supset D \rightarrow Y$ im Punkt $x_0 \in \text{int}(D)$, wenn es eine offene Kugel $B_r(x_0) \subset D$ und ein positives reelles Funktional $\varepsilon : x \in B_r(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ gibt, so dass für alle $x \in B_r(x_0)$ gilt:

$$\|F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)\|_Y \leq \varepsilon(x)\|x - x_0\|_X. \quad (3.62)$$

Der Operator F heißt auf der offenen Menge $S \subset D$ Fréchet-differenzierbar, wenn er in allen Punkten $x_0 \in S$ eine Fréchet-Ableitung $F'(x_0) := A$ besitzt.

Gilt für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ anstelle von Ungleichung (3.62) für hinreichend kleines t und beliebige Elemente $h \in X$ mit $\|h\|_X = 1$ sowie eine positive reelle Funktion ε mit $\lim_{t \downarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ die Beziehung

$$\|F(x_0 + th) - F(x_0) - t(Ah)\|_Y \leq \varepsilon(t)|t|, \quad (3.63)$$

so heißt $F'(x_0) = A$ Gâteaux-Ableitung von F im Punkt x_0 . Anschaulich bedeuten beide Ableitungsbegriffe folgendes: Existieren in einem Punkt alle Richtungsableitungen und lassen sich diese beschreiben als linearer Operator angewendet auf die Richtung, dann spricht man von einer Gâteaux-Ableitung. Für eine Fréchet-Ableitung muss, vereinfacht gesagt, zusätzlich das Restglied gleichmäßig gegen Null gehen. Jede Fréchet-Ableitung ist automatisch auch Gâteaux-Ableitung. Jeder auf einer offenen Menge Fréchet-differenzierbare Operator ist auf dieser Menge auch stetig. Existiert $F'(x_0)$ für alle $x \in B_r(x_0)$ und ist als Abbildung $x \in B_r(x_0) \subset X \mapsto F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ stetig, so gilt die Darstellung

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt \quad (x \in B_r(x_0)) \quad (3.64)$$

Ist außerdem

$$\|F'(x) - F'(x_0)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq L\|x - x_0\|_X \quad (x \in B_r(x_0)), \quad (3.65)$$

so erhalten wir aus (3.64) die Abschätzung

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \frac{L}{2}\|x - x_0\|_X^2 \quad (x \in B_r(x_0)). \quad (3.66)$$

Für uns ist wichtig, dass sich die Kompaktheit des nichtlinearen Operators auf die Fréchetableitung überträgt. Für mehr Einzelheiten sei auf das Buch von Colton und Kress verwiesen.

Lemma 18 *Es sei $F : X \supset D \rightarrow Y$ ein auf der offenen Menge $S \subset D$ kompakter Operator, der im Punkt $x_0 \in S$ Fréchet-differenzierbar ist. Dann stellt die Fréchet-Ableitung $F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ebenfalls einen kompakten Operator dar.*

3.2.2 Hinreichende Bedingungen für lokale Inkorrektheit und lokale Korrektheit

Aus der bisherigen Theorie wissen wir bereits, dass kompakte lineare Operatoren A mit unendlich dimensionalen Bildraum $R(A)$ stets auf inkorrekte Probleme führen, bei denen insbesondere die Hadamardsche Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Außerdem konnten wir uns davon überzeugen, dass lokale Inkorrektheit einer nichtlinearen inversen Aufgabe einer lokalen Variante der Stabilitätsbedingung entspricht. Es liegt daher nahe, dass kompakte nichtlineare Operatoren F mit lokal inkorrekten Problemen verbunden sind. Das wollen wir im nächsten Theorem nachweisen. Vorher aber formulieren wir noch einige Voraussetzungen, die uns in diesem Abschnitt stets begleiten sollen: Wir nehmen an, dass der Definitionsbereich D von F wenigstens eine abgeschlossene Kugel

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq r\} \subset D(F) \quad (3.67)$$

mit positivem Radius r enthält und der Operator F im Inneren $B_r(x_0)$ der Kugel stetige Fréchet-Ableitungen $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ besitzt, die der Glattscheitsbedingung (3.65) genügen.

Theorem 16 *Der Definitionsbereich D des zwischen den unendlichdimensionalen Hilberträumen X und Y wirkenden schwach abgeschlossenen Operators F erfülle für eine Kugelradius $r > 0$ die Bedingung (3.67). Weiter sei F auf $\bar{B}_r(x_0)$ kompakt. Dann ist die nichtlineare Operatorgleichung (3.61) in x_0 lokal inkorrekt.*

Wir fixieren in X ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{e_n\} \subset X$. Wir wissen $e_n \rightarrow 0$ in X . Dann gilt

$$x_n := x_0 + \rho e_n \in \bar{B}_r(x_0) \quad \text{mit } \|x_n - x_0\|_X = \rho \text{ und } x_n \rightarrow x_0,$$

aber $x_n \not\rightarrow x_0$ in X für beliebige $0 < \rho \leq r$. Nach Lemma 17 folgt aus der schwachen Konvergenz von x_n die starke Konvergenz der Bildelemente $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$ in Y . Dies entspricht gerade der lokalen Inkorrektheit.

Unter den in Theorem 16 geforderten Bedingungen ist die Kompaktheit von F die entscheidende für die lokale Inkorrektheit von (3.61) in x_0 . Aussagen darüber, wie man die Kugelbedingung abschwächen kann findet man bei Engl/Kunisch/Neubauer.

Um eine nichtlineare Gleichung (3.61) in der Umgebung eines Punktes x_0 näherungsweise mit Hilfe einer einfacheren linearen Gleichung lösen zu können, betrachtet man gern die Linearisierung, die sich ergibt, wenn man $F(x)$ in x_0 in eine Taylorreihe bis zum linearen Glied $F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ entwickelt. So entsteht als Näherung für (3.61) eine lineare Operatorgleichung

$$F'(x_0)x = \tilde{y}, \quad x \in D \subset X, \quad \tilde{y} \in Y, \quad F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y) \quad (3.68)$$

vom Typ (1.2) mit $\tilde{y} = y - F(x_0) + F'(x_0)x_0$. Wegen Lemma 18 ist für F kompakt auf $\bar{B}_r(x_0)$ auch die Fréchet-Ableitung kompakt. Aufgrund der Ergebnisse von 3.1 erweist sich die lineare Operatorgleichung (3.68) genau dann als korrekt nach Nashed, wenn $\dim R(F'(x_0)) < \infty$ gilt. Für kompakte Operatoren F und unendlichdimensionale Hilberträume X und Y führt das in x_0 lokal instabile nichtlineare Problem (3.61) entweder auf ein ebenfalls instabiles linearisiertes Problem (3.68) mit $\dim R(F'(x_0)) = \infty$ und einer unbeschränkten Moore-Penrose-Inversen $F'(x_0)^\dagger$ der Fréchet-Ableitung oder aber $F'(x_0)$ ist ausgeartet mit $F'(x_0)^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$ und einer stabilen linearisierten Gleichung (3.68). Für beide Fälle lassen sich Beispiele angeben.

Man kann die lokale Korrektheit einer nichtlinearen Gleichung (3.61) allerdings erzwingen, indem man den Bereich der zulässigen Lösungen auf eine Menge

$$\tilde{D} = \{x \in D : x - x_0 = F'(x_0)^*w, w \in Y, \|w\|_Y \leq \tau\} \quad (3.69)$$

einschränkt. Alle Elemente einer solchen Menge lassen eine *Quelldarstellung*

$$x - x_0 = F'(x_0)^*w \quad (w \in Y) \quad (3.70)$$

zu, wobei $F'(x_0)^*$ der zu $F'(x_0)$ adjungierte Operator ist.

Theorem 17 *Unter den in diesem Abschnitt formulierten Voraussetzungen an das lokale Verhalten des Operators F in der Umgebung des Punktes x_0 ist die Operatorgleichung*

$$F(x) = y, \quad x \in \tilde{D} \subset X, \quad y \in Y \quad (3.71)$$

mit einem gegenüber der Ausgangsgleichung (3.61) im Sinne von (3.69) eingeschränkten Bereich \tilde{D} zulässiger Lösungen lokal korrekt in x_0 , falls

$$\tau \cdot L < 2$$

gilt.

Wir betrachten zum Beweis dieses Theorems die für alle $x \in \tilde{D}$ gültige und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung resultierende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|^2 &= \langle x - x_0, F'(x_0)^* w \rangle_X \\ &= \langle F'(x_0)(x - x_0), w \rangle_Y \\ &\leq \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \|w\|_Y \\ &\leq \tau \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \end{aligned}$$

Dann ergibt sich für $x \in \tilde{D} \cap B_r(x_0)$ mit (3.66) und $\theta = \frac{L\tau}{2}$

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \theta \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y.$$

Aus unserer Voraussetzung folgt $\theta < 1$. Die Dreiecksungleichung impliziert

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y &\leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \\ &\leq \theta \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \frac{1}{1 - \theta} \|F(x) - F(x_0)\|_Y.$$

Insgesamt erhalten wir für alle $x \in \tilde{D} \cap B_r(x_0)$ die Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_X \leq \sqrt{\frac{\tau}{1 - \theta}} \sqrt{\|F(x) - F(x_0)\|_Y},$$

aus der die lokale Korrektheit von (3.71) folgt.

Gelingt es bei der näherungsweise Lösung der Gleichung (3.61) in einer Umgebung von x_0 stets solche Näherungslösungen auszuwählen, die der Queldarstellung (3.70) genügen, so kann man die Instabilität des Problems überwinden. Manche iterative Näherungsverfahren zur Lösung von (3.61) lassen sich in dieser Weise handhaben.

Beispiel 3.7 Wir betrachten für eine lichtdurchlässige Materialschicht der Dicke $d = 1$, in welcher der reelle Parameter t den Abstand eines Schichtpunktes von der Unterkante der Schicht beschreibt, die Profilkfunktion $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) einer physikalischen Größe, deren nicht direkt messbaren Werte nur von t abhängen. Bei der Schicht kann es sich um einen dünnen Film aber auch um eine Luftschicht in der Erdatmosphäre handeln, wobei $x(t)$ z.B. ein Refraktionsprofil oder Temperaturprofil verkörpern kann. Aus integralen Messdaten $y(s)$ ($0 \leq s \leq 1$), die bei der Durchstrahlung der Schicht gewonnen werden, soll im Sinne eines Identifikationsproblems die Materialfunktion x rekonstruiert werden. Diese Daten können zum Beispiel die Intensität der Strahlung als Funktion der Wellenlänge oder des Einfallswinkels s der Strahlung sein. Kennt man die Reaktionsfunktion $k(s, t, x)$ der Schichtbestandteile in der jeweiligen Höhe t auf die Strahlung s , so ist das inverse Problem als *Urysohnsche Integralgleichung*

$$(F(x))(s) = \int_0^1 k(s, t, x(t)) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.72)$$

zu schreiben. Wenn mit $f \in L^2((0, 1) \times (0, 1))$

$$|k(s, t, x)| \leq f(s, t)(c_1 + c_2|x|) \quad (s, t \in [0, 1], x \in \mathbb{R})$$

gilt, so ist der Operator $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ auf dem ganzen Raum $L^2(0, 1)$ kompakt und die Gleichung (3.72) damit überall lokal inkorrekt. Falls weiterhin die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial k(s, t, x)}{\partial x^2}$ der Kernfunktion überall existieren und gleichmäßig beschränkt sind, so gibt es für alle $x_0 \in L^2(0, 1)$ die Fréchet-Ableitung $F'(x_0)$ des Operators F mit der Darstellung

$$(F'(x_0)h)(s) = \int_0^1 \frac{\partial k(s, t, x_0(t))}{\partial x} h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1, h \in L^2(0, 1)). \quad (3.73)$$

Der Operator $F'(x_0)$ aus (3.73) ist dann für alle $x_0 \in L^2(0, 1)$ ein kompakter linearer Fredholmscher Integraloperator mit quadratisch integrierbarem

Kern. Auch das in Beispiel 3.1 vorgestellte Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie führt bei strenger Modellierung erst einmal auf eine Integralgleichung vom Typ (3.72). Meist wird jedoch bei der näherungsweise Bestimmung vertikaler Temperaturprofile in der Erdatmosphäre eine Linearisierung (siehe Formel (3.68)) verwendet. Durch Diskretisierung entsteht dann ein lineares Gleichungssystem, welches wir im Beispiel 3.1 diskutiert haben.

Betrachtet man dagegen noch einmal den nichtlinearen Selbstfaltungsoperator $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ aus Formel (2.33), so erweist sich dieser als schwach abgeschlossen, aber nicht kompakt auf jeder Kugel $B_r(0)$ (siehe Gorenflo/Hofmann). Von der Nichtkompaktheit des Operators F überzeugt man sich leicht anhand der Folge

$$x_n(t) = r \sin nt \quad (0 \leq t \leq 1)$$

mit $\{x_n\} \in B_r(0)$, $x_n \rightharpoonup 0$, $\|x_n\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \frac{r}{2}\sqrt{2} \neq 0$ und

$$(F(x_n))(s) = r^2 \left(\frac{s \cos ns}{2} + \frac{\sin ns}{2n} \right) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

sowie $F(x_n) \rightharpoonup 0$, aber $\|F(x_n)\|_{L^2(0,1)} \rightarrow \frac{r}{12}\sqrt{6} \neq 0$. Die Bildfolge $\{F(x_n)\}$ in $L^2(0, 1)$ kann also keine konvergente Teilfolge besitzen und es liegt keine Kompaktheit vor. Interessanterweise ist trotzdem die Fréchet-Ableitung

$$(F'(x_0)h)(s) = 2 \int_0^s x_0(s-t)h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1, h \in L^2(0, 1)) \quad (3.74)$$

für alle $x_0 \in L^2(0, 1)$ ein kompakter linearer Faltungsoperator.

3.2.3 Der lokale Grad der Inkorrektheit

Um für ein nichtlineares Identifikationsproblem (3.61) in sinnvoller Weise einen lokalen Grad der Inkorrektheit im Punkt $x_0 \in D$ definieren zu können, benötigt man lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die das lokale Verhalten des Operators F in einer Umgebung von x_0 hinreichend gut widerspiegeln. Diese Rolle übernimmt natürlich die Fréchet-Ableitung, wie wir uns im nächsten Theorem überzeugen können. Unter dem Grad der Inkorrektheit von (3.61) im Punkt x_0 versteht man dann den Grad der Inkorrektheit der linearisierten Gleichung. Die Welt der nichtlinearen Operatoren ist jedoch sehr reichhaltig.

Es zeigt sich, dass die Verbindung zur Fréchet-Ableitung unterschiedlich eng sein kann. Eine sehr enge Bindung besteht wenn eine η -Bedingung

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x - x_0)\|_Y \leq \eta \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (3.75)$$

für eine Konstante $\eta > 0$ und alle x aus einer Kugel $\tilde{B}_r(x_0)$ erfüllt wird. Die Fréchet-Ableitung bringt dann die wesentlichen Eigenschaften des nicht-linearen Operators in einer gewissen Umgebung zum Ausdruck. Gilt nur eine Abschätzung (3.69), so kann dieser Zusammenhang wesentlich schwächer sein. In diesem Fall liefert Theorem 17 gute Argumente, sich mit der Abklingrate der Singulärwerte der Fréchetableitung zu beschäftigen.

Um Aufschluss über das Stabilitätsverhalten einer nichtlinearen Operatorgleichung (3.61) im Punkt x_0 zu gewinnen, kann man sich fragen, welche lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine Ungleichung des Typs

$$\|A(x - x_0)\|_Y \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (x \in B_r(x_0)) \quad (3.76)$$

befriedigen. Betrachtet man solche Operatoren A , so gilt für diese mit $\|z\|_Z = \|Az\|_Y$ ($z \in X$) eine Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_Z \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \quad (x \in B_r(x_0)).$$

Dabei erfüllt $\|z\|_Z$ die ersten beiden Normaxiome. Das dritte Normaxiom gilt nur für injektive Operatoren. Wir sprechen daher nur von einer Seminorm. Misst man die Abstände in X in dieser Seminorm, so ist (3.76) diesbezüglich lokal korrekt, wenn (3.76) gilt. Wir suchen unter allen solchen Operatoren A nun denjenigen A_{max} heraus, der maximal ist bezüglich der Halbordnung

$$A_1 \prec A_2 \Leftrightarrow \|A_1 h\|_Y \leq \|A_2 h\|_Y \quad (h \in X), \quad (3.77)$$

d.h. für den stets $A \prec A_{max}$ gilt. Dieser gesuchte Operator ist derjenige mit dem kleinsten Nullraum und mit den geringsten Glättungseigenschaften, unter allen Operatoren A , die (3.76) erfüllen. Es sollte erwähnt werden, dass die Halbordnung (3.77) sich auf Äquivalenzklassen bezieht. Zwei Operatoren gehören zur selben Äquivalenzklasse, falls sie der Beziehung $A_1 \sim A_2$ mit

$$A_1 \sim A_2 \Leftrightarrow c_{min} \|A_2 h\|_Y \leq \|A_1 h\|_Y \leq c_{max} \|A_2 h\|_Y \quad (h \in X) \quad (3.78)$$

für Konstanten $0 < c_{min} \leq c_{max} < \infty$ genügen.

Theorem 18 *Der Operator F erfülle für $x \in \bar{B}_r(x_0)$ eine η -Bedingung (3.75). Dann ist die Fréchetableitung $F'(x_0)$ ein Repräsentant der eindeutig bestimmten Äquivalenzklasse maximaler Operatoren A_{max} zur Halbordnung (3.77) bezüglich aller beschränkten linearen Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die eine Ungleichung (3.76) befriedigen.*

Die Aussage von Theorem 18 ergibt sich aus der Tatsache, dass die betrachtete Fréchet-Ableitung auch eine Gâteaux-Ableitung mit

$$F'(x_0)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}$$

ist. Dann folgt nämlich für alle $h \in X$ und hinreichend kleinem t die Ungleichung

$$\|A(th)\|_Y \leq K \|F(x_0 + th) - F(x_0)\|_Y$$

und beim Übergang zur Grenze $t \rightarrow 0$ auch

$$\|Ah\|_Y \leq K \|F'(x_0)h\|_Y.$$

Damit gilt $A \prec F'(x_0)$ für alle Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die (3.76) erfüllen. $F'(x_0)$ erfüllt aber selbst die Bedingung (3.76), da aufgrund der Dreiecksungleichung und der η -Bedingung gilt

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y &\leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \\ &\leq (\eta + 1) \|F(x) - F(x_0)\|_Y. \end{aligned}$$

Somit ist die Fréchet-Ableitung maximaler Operator im Sinne der eingeführten Halbordnung.

Im Anschluss an die Beispiele 2.4 und 2.5 und durch diese angeregt wurde der nichtlineare Operator (2.32) diskutiert und die lokale Inkorrektheit der entsprechenden nichtlinearen Gleichung gezeigt. Wir betrachten für $X = Y = L^2(0, 1)$ diesen auf ganz $L^2(0, 1)$ definierten Operator

$$(F(x))(s) := c_0 \exp\left(c_1 \int_0^s x(t) dt\right) \quad (0 \leq s \leq 1; c_0 > 0, c_1 \neq 0) \quad (3.79)$$

mit der Fréchet-Ableitung

$$(F'(x_0)h)(s) := c_1 (F(x_0))(s) \int_0^s h(t) dt \quad (0 \leq s \leq 1; h \in L^2(0, 1)) \quad (3.80)$$

im Punkt $x_0 \in L^2(0, 1)$. Wegen der Positivität, Stetigkeit und damit Beschränktheit der Funktion $(F(x_0))(s)$ ($0 \leq s \leq 1$) (siehe Aufgabe 2.4) haben wir Äquivalenz $F'(x_0) \sim A$ im Sinne von Formel (3.78) zwischen der Fréchet-Ableitung (3.80) und dem Integraloperator A des Differentiationsproblems (siehe Formel (3.32)), von dem wir wissen, dass ein Inkorrekttheitsgrad $\nu = 1$ vorliegt. Dann ist folglich $\nu = 1$ auch der im ganzen Raum $L^2(0, 1)$ einheitliche Grad der Inkorrekttheit von (3.61) für F aus (3.79) (siehe Formeln (3.57) und (3.58)). Der in (3.80) definierte Operator $F'(x_0)$ ist wegen Theorem 18 für alle $x_0 \in L^2(0, 1)$ auch maximaler Operator im Sinne der eingeführten Halbordnung. Die Erfüllung einer η -Bedingung sieht man wie folgt: Wir definieren zunächst

$$\psi(s) = c_1 \int_0^s (x(t) - x_0(t)) dt,$$

erhalten

$$(F(x) - F(x_0))(s) = (F(x_0))(s)(\exp(\psi(s)) - 1)$$

und somit

$$(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))(s) = (F(x_0))(s)(\exp(\psi(s)) - 1 - \psi(s)).$$

Aus der Abschätzung

$$|\exp(\psi) - 1 - \psi| \leq |\psi| |\exp(\psi) - 1| \quad (\psi \in \mathbb{R})$$

folgt zunächst

$$|(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))(s)| \leq |\psi(s)| |(F(x) - F(x_0))(s)|$$

und daraus schließlich

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_{L^2(0,1)} \leq c_1 \|x - x_0\|_{L^2(0,1)} \|F(x) - F(x_0)\|_{L^2(0,1)}.$$

Aber nicht jeder nichtlineare Operator führt wie F aus (3.79) auf einen in allen Punkten x_0 einheitlichen Grad der Inkorrekttheit. Wie in Gorenflo/Hofmann ausführlich dargestellt wird variiert der Grad der Inkorrekttheit in Abhängigkeit vom Punkt x_0 stark für den Selbstfaltungsoperator. Theorem 14 zeigt nämlich, dass für einen Faltungsoperator (3.74), der in diesem Fall die Fréchet-Ableitung bildet, schwach mäßige und starke Inkorrekttheiten möglich sind, je nachdem wie glatt die Funktion x_0 ist und welches Verhalten diese Funktion an der Stelle $t = 0$ aufweist (siehe auch Aufgabe 3.6).

Übungsaufgabe 3.1 Zeigen Sie, dass für Elemente $y \notin R(a) \oplus R(A)^\perp$ keine Minimum-Norm-Lösungen der linearen Operatorgleichung (3.1) im Sinne der Formeln (3.4) und (3.5) existieren, also die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger auf diese Elemente nicht anwendbar ist. Zeigen Sie dazu, dass das Funktional $J(x) = \|Ax - y\|_Y^2$ des Defektnormquadrats für $y \notin R(a) \oplus R(A)^\perp$ zwar ein endliches Infimum $\inf_{x \in X} J(x) > -\infty$ besitzt, jedoch für solche rechten Seiten y kein Element x_{mn} mit $J(x_{mn}) = \inf_{x \in X} J(x)$ existiert.

Übungsaufgabe 3.2 Wir betrachten in Beispiel 3.1 den Fall eines unterbestimmten linearen Gleichungssystems (3.7) mit $m < n$ und $\text{rang}(A) = m$. Man finde in diesem Fall eine Darstellung der Minimum-Norm-Lösung x_{mn} von (3.7) als Gegenstück zu der für den Vollrangfall gültigen Formel (3.8).

Übungsaufgabe 3.3 Ist die Lösung $x \in L^2(0, L)$ der Integralgleichung (3.13) aus Beispiel 3.3, sofern eine solche für gegebenes $y \in L^2(0, L)$ überhaupt existiert, stets eindeutig bestimmt?

Übungsaufgabe 3.4 Im Falle separabler unendlichdimensionaler Hilberträume X, Y und Z gelte für zwei beschränkte lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(X, Z)$ die Abschätzung

$$\|Ax\|_Y \leq C\|Bx\|_Z$$

für alle x aus X mit einer positiven Konstante C . Man zeige, dass die folgenden Aussagen gelten: Falls B kompakt ist, so ist auch A kompakt. Wenn A und B kompakte Operatoren sind und sich die Operatorgleichung $Ax = y$ als höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$ erweist, so ist auch die Operatorgleichung $Bx = z$ höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$.

Übungsaufgabe 3.5 Welchen Grad der Inkorrektheit besitzt die Faltungsgleichung

$$\int_0^s \exp\left(-\frac{1}{s-t}\right) x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$?

Übungsaufgabe 3.6 Für welche Elemente $x_0 \in L^2(0, 1)$ erfüllt der in Formel (2.33) definierte Selbstfaltungsoperator $F : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ eine η -Bedingung (3.75) für alle x aus einer Kugel $\bar{B}_r(x_0)$ im Raum $L^2(0, 1)$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius $r > 0$?

Kapitel 4

Regularisierungsmethoden

Wir wollen in diesem Kapitel Möglichkeiten aufzeigen, wie man inkorrekte inverse Aufgaben näherungsweise stabil lösen kann. Methoden, die einen solchen Zweck erfüllen, nennt man *Regularisierungsmethoden*. Wir wollen hier einen Überblick über solche Methoden geben und wichtige Prinzipien der Regularisierungstheorie vorstellen.

Die Einbeziehung von Zusatzinformationen haben wir bereits im Kapitel 2 behandelt. Dabei haben wir die als deskriptive Regularisierung bezeichnete Regularisierungstechnik kennengelernt, die auf dem Satz von Tichonov beruht. Die Hauptidee besteht dabei in der Einschränkung des Definitionsbereichs D auf eine kompakte Menge in X . In diesem Kapitel interessieren wir uns für den in der Praxis häufiger vorkommenden Fall, dass eine solche Einschränkung nicht erreicht werden kann.

Wir konzentrieren uns hier auf die Darstellung von Methoden im Hilbertraum, d.h. wir betrachten die Probleme (3.1) und (3.61). Aus den bisherigen Untersuchungen wissen wir, dass die Methode der kleinsten Quadrate beruhend auf der Minimierung des Defektnormquadrats

$$\|F(x) - y_\delta\|_Y^2 = \min !, \quad x \in D \subset X \quad (4.1)$$

für allgemeine nichtlineare Operatorgleichungen bzw.

$$\|Ax - y_\delta\|_Y^2 = \min !, \quad x \in X \quad (4.2)$$

für unrestringierte lineare Operatorgleichungen praktisch zum Scheitern verurteilt ist. Man bezeichnet diese Methode häufig als output least squares. Für die Verbindung zwischen den fehlerbehafteten und fehlerfreien Daten soll wieder

$$\|y - y_\delta\|_Y \leq \delta \quad (4.3)$$

gelten. Zum einen wird im Normalfall ein solches minimierendes Element gar nicht existieren und zum anderen wissen wir, dass bei Existenz eines solchen Elements, das Element unstetig von den Daten abhängt. Nicht viel günstiger sieht die Situation nach Diskretisierung aus. Inkorrekt gestellte Probleme sind meist sehr schlecht konditioniert. Daher kann man nur mit sehr groben Diskretisierungen arbeiten.

Das Prinzip der Regularisierung besteht nun darin, die Bildelemente *nicht so genau wie möglich* zu approximieren, sondern *nur so genau wie nötig*. Damit schafft man sich Spielraum für die Einbeziehung subjektiver Apriori-Informationen in den Lösungsvorgang. Diese Anpassung ist so zu verstehen, dass nur Elemente als Lösungen in Frage kommen, die zu den Daten kompatibel sind, d.h. die die Größenordnung des Datenfehlers nicht überschreiten. Die Menge der datenkompatiblen Elemente ist aber in der Regel sehr groß. Die Regularisierung kennt nun zwei Wege, aus dieser Menge geeignete Elemente auszuwählen. Der erste Weg ist theoretisch kaum beherrschbar und besteht in einer ungesteuerten Regularisierung. Man löst dabei die Minimierungsprobleme (4.1) bzw. (4.2) durch unvollständige Minimierung. Diese Minimierung bricht man nach einer genau festgelegten Zahl von Iterationen ab. Man verringert dabei deutlich den Einfluss der Instabilitäten. Diese wirken sich erst dann richtig aus, wenn die Iterierten sich dem Minimum annähern.

Ein diskretisiertes inverses Problem kann auch durch die Zulassung von Rundungsfehlern stabilisiert werden. In beiden Fällen ist aber trotz eventuell erreichter Stabilität völlig unklar, welche Eigenschaften die Approximationen der Lösungen besitzen und wie weit der Abstand von der tatsächlichen Lösung ist.

Die Eigenschaften der Näherungslösungen kann man sehr gut beschreiben, wenn man gesteuert regularisiert. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine Möglichkeit besteht darin, über der Menge der datenkompatiblen Lösungen ein Sympathiefunktional zu minimieren. Eine andere besteht darin, das iterative Minimierungsverfahren beim Erreichen des Datenfehlers δ abzubre-

chen. Man kann die regularisierte Lösung in einem endlichen Teilraum suchen, wobei die Dimension des Teilraumes eine Steuergröße ist. Verschiedene Methoden zur gesteuerten Regularisierung werden wir in diesem Abschnitt näher untersuchen.

4.1 Regularisierung von linearen Operatorgleichungen mit kompakten Operatoren

In diesem Abschnitt diskutieren wir unrestringierte lineare Operatorgleichungen, die inkorrekt vom Typ II nach Nashed sind. Sie sind durch kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalem Bildraum gekennzeichnet. In einem allgemeinen Regularisierungsschema können verschiedene Regularisierungsmethoden eingeordnet werden. Dieses Schema lässt sich auch auf inkorrekte Probleme vom Typ I nach Nashed anwenden. Mit der dafür notwendigen Spektraltheorie solcher Operatoren wollen wir uns hier aber nicht beschäftigen.

4.1.1 Ein allgemeines Regularisierungsschema

Unter der exakten Lösung von (3.1) werden wir im weiteren die Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ für eine exakte rechte Seite $y \in R(A)$ verstehen. Anhand von gestörten Daten $y_\delta \in Y$, welche Ungleichung (4.3) befriedigen, soll diese exakte Lösung durch lineare Transformation der Daten näherungsweise so berechnet werden, dass die Näherungslösungen stetig von den Daten abhängen und einen möglichst kleinen Fehler aufweisen.

Definition Eine Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ von beschränkten linearen Operatoren $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$ heißt lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger , wenn

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha y = A^\dagger y \quad \text{für alle } y \in R(A) \quad (4.4)$$

gilt. Der Operator R_α heißt linearer Regularisierungsoperator mit dem Regularisierungsparameter α .

Die Operatoren R_α approximieren für $\alpha \rightarrow 0$ punktweise die Moore-Penrose-Inverse A^\dagger . Es gilt dabei folgendes Lemma (siehe Engl/Hanke/Neubauer):

Lemma 19 *Wenn der Wertebereich $R(A)$ des Operators $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ in Y nicht abgeschlossen ist, so folgt für eine Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ von beschränkten linearen Regularisierungsoperatoren $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$, welche die Grenzwertbeziehung (4.4) befriedigen, die bestimmte Divergenz der Operatornormen*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} = \infty. \quad (4.5)$$

Wendet man die Operatoren R_α für einen festen Wert $\alpha > 0$ auf die Daten y bzw. y_δ an, so entstehen regularisierte Lösungen $x_\alpha = R_\alpha y$ bzw. $x_\alpha^\delta = R_\alpha y_\delta$, die wegen der Beschränktheit von R_α stetig von den Daten abhängen. Weiter erhält man aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X &= \|R_\alpha y_\delta - A^\dagger y\|_X \\ &\leq \|R_\alpha y_\delta - R_\alpha y\|_X + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X \\ &\leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|y - y_\delta\|_Y + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X \end{aligned}$$

und damit im Endergebnis

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \delta + \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X. \quad (4.6)$$

Der totale Regularisierungsfehler besteht also aus der Stabilitätskomponente $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \delta$ und der Approximationsfehlerkomponente $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$. Im Fall exakter Daten ist diese Approximationskomponente ein Maß des Abstandes zwischen dem Originalproblem und dem gelösten stabilen Näherungssystem. Für kleine α wird die Komponente $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$ des Regularisierungsfehlers klein und strebt gegen Null. Dagegen tendiert die erste Komponente $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \delta$ wegen (4.5) bei festem Datenfehlerniveau $\delta > 0$ ins Unendliche.

Die Wahl eines optimalen Regularisierungsparameters wird wieder auf der Grundlage eines Kompromisses zwischen Approximation und Stabilität gewonnen. Leider hängt der optimale Regularisierungsparameter von der Lösung x_{mn} selbst ab und ist daher anhand der Daten nicht apriori bestimmbar. Für die Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters wurden aber heuristische Strategien entwickelt, auf die wir später eingehen werden.

Hier soll uns numehr die Frage beschäftigen, ob man für eine Folge von Daten, deren Datenfehlerniveau δ gegen Null strebt, eine zugehörige Folge von Regularisierungsparametern $\alpha = \alpha(\delta)$ finden kann, so dass auch der Regularisierungsfehler $\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X$ gegen Null strebt.

Definition: Im Zusammenhang mit der Bestimmung von Minimum-Norm-Lösungen x_{mn} einer linearen Differentialgleichung in Hilberträumen X und Y sei eine lineare Regularisierung $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ gegeben. Dann heißt diese Regularisierung für eine Vorschrift $\alpha = \alpha(\delta, y_\delta)$ zur Auswahl des positiven Regularisierungsparameters konvergent, wenn für alle $y \in R(A)$

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \{ \|R_{\alpha(\delta, y_\delta)} y_\delta - x_{mn}\|_X : y_\delta \in Y, \|y - y_\delta\|_Y \leq \delta \} = 0 \quad (4.7)$$

gilt.

Wir sprechen von einer Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$, wenn der Regularisierungsparameter α nur vom Datenfehlerlevel δ abhängig gemacht wird. Ansonsten sprechen wir von einer Aposteriori-Parameterwahl. Hier kann in die Wahl des Parameters zum Beispiel die augenblickliche Defektnorm $\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y$ einfließen. Eine interessante Tatsache, die in der Literatur manchmal als Bakushinski-Veto bezeichnet wird, ist die Nichtexistenz von konvergenten linearen Regularisierungen für nach Nashed inkorrekte Operatorgleichungen, bei denen mit $\alpha = \alpha(y_\delta)$ die Parameterwahlvorschrift nur von den Daten abhängt ohne das Datenfehlerlevel explizit zu berücksichtigen. Vorschriften zur Regularisierungsparameterwahl, die ohne Kenntnis von δ auskommen, liefern daher niemals konvergente lineare Regularisierungen.

Eine direkt aus Formel (4.6) resultierende Apriori-Parameterwahl, die auf eine konvergente Regularisierung führt, liefert das nächste Theorem:

Theorem 19 *Eine lineare Regularisierung $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ für A^\dagger ist konvergent, wenn der Regularisierungsparameter $\alpha = \alpha(\delta)$ so gewählt wird, dass die Grenzwertbeziehungen*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad (4.8)$$

und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \delta = 0 \quad (4.9)$$

erfüllt sind.

Es ergeben sich nun als Fragen, wie man eine lineare Regularisierung überhaupt konstruieren kann, wie die Größen $\|R_{\alpha(\delta)}\|_{\mathcal{L}(Y, X)}$ beschaffen sind und welche Forderungen man an $\alpha = \alpha(\delta)$ stellt, damit (4.9) erfüllt ist. Zur Beantwortung dieser Fragen betrachten wir lineare Regularisierungen für A^\dagger

auf der Grundlage der singulären Systeme für kompakte Operatoren A mit unendlichdimensionalem Bildraum. Wir gehen dazu von einer Reihendarstellung der Minimum-Norm-Lösung

$$A^\dagger y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle_Y u_j, \quad y \in R(A) \quad (4.10)$$

aus und führen Filterfunktionen $f(\alpha, \sigma_j)$ zur Dämpfung ein. Als lineare Näherungsvorschrift für $A^\dagger y$ wählt man dabei

$$R_\alpha y_\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(\alpha, \sigma_j)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j, \quad y_\delta \in R(A) \quad (4.11)$$

wobei die Filterfunktionen $f : (0, \infty) \times (0, \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}] \rightarrow \mathbb{R}$ für eine nichtnegative Funktion $K : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ die Bedingungen

$$0 \leq f(\alpha, \sigma) \leq 1 \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}, \quad (4.12)$$

$$|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha) \sigma \quad \text{für alle } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.13)$$

sowie

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1 \quad \text{für alle } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.14)$$

erfülle.

Theorem 20 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter Operator mit dem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^{\infty}$. Dann ist die über Vorschrift (4.11) definierte Familie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ von beschränkten linearen Operatoren aus $\mathcal{L}(Y, X)$ eine lineare Regularisierung für A^\dagger , wenn für die Filterfunktion f die Bedingungen (4.12), (4.13) und (4.14) erfüllt sind. Dabei gilt $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq K(\alpha)$, und die Regularisierung ist konvergent für eine Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$, wenn $\delta \rightarrow 0$ die Grenzwertbeziehungen $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ und $\delta K(\alpha) \rightarrow 0$ nach sich zieht.*

Man überzeugt sich anhand der aus (4.13) folgenden und für alle $y_\delta \in Y$ geltenden Beziehung

$$\|R_\alpha y_\delta\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f(\alpha, \sigma_j))^2}{\sigma_j^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq (K(\alpha))^2 \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq (K(\alpha))^2 \|y_\delta\|_Y^2$$

sofort von der Beschränktheit des Operators R_α und der dabei auftretenden Beziehung $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq K(\alpha)$. Die Grenzwertbeziehung (4.4) resultiert für $x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle_X u_j$, $x_0 \in N(A)$ und $y = Ax$ aus der Reihendarstellung

$$\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X^2 = \|R_\alpha Ax - A^\dagger Ax\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle_X^2, \quad (4.15)$$

wobei wegen

$$\sum_{j=1}^{\infty} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle_X^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_j \rangle_X^2 \leq \|x\|_X^2 \quad \text{siehe (4.12)}$$

das Weierstraßsche Majorantenkriterium für Reihen anwendbar ist und die Vertauschung des Grenzübergangs $\alpha \rightarrow 0$ mit der Summation ermöglicht, so dass mit (4.14) und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f(\alpha, \sigma_j) - 1)^2 \langle x, u_j \rangle_X^2 = 0$$

auch

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X^2 = 0$$

für $y \in R(A)$ folgt. Die Konvergenzaussage für die Regularisierung ist dann eine direkte Folgerung aus Theorem 19. \square

Wir bemerken noch, dass die in Theorem 20 auftretende Konvergenz des Approximationsfehlers $\|R_\alpha y - A^\dagger y\|_X$ nicht gleichmäßig über alle $x \in X$ erfolgt. So existiert keine positive Funktion $C(\alpha)$ mit $\lim_{\alpha \rightarrow 0} C(\alpha) = 0$, die eine Konvergenzrate bezüglich des Regularisierungsparamaters α für diese Komponente des Regularisierungsfehlers zum Ausdruck bringen würde, derart dass

$$\|R_\alpha Ax - A^\dagger Ax\|_X \leq C(\alpha) \|x\|_X \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und alle } x \in X \quad (4.16)$$

gilt. Wegen Formel (4.15) folgt aus (4.16) nämlich

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |f(\alpha, \sigma_j) - 1| \leq C(\alpha).$$

Dies kann aber nicht gelten, denn mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0$ folgt aus der Ungleichung (4.13) für alle $\alpha > 0$ die Grenzwertbeziehung $\lim_{j \rightarrow \infty} f(\alpha, \sigma_j) = 0$ und damit

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |f(\alpha, \sigma_j) - 1| = 1.$$

4.1.2 Die Tichonov-Regularisierung

Aus der Betrachtung des Abschnitts 3.1.4 im Anschluss an Formel (3.5) ergibt sich, dass Lösungen des Kleinste-Quadrate-Problems (4.2) auch Lösungen der Normalgleichung

$$A^*Ax = A^*y_\delta, \quad x \in X \quad (4.17)$$

sind und umgekehrt. Die Normalgleichung weist aber kaum bessere Eigenschaften auf als die lineare Operatorgleichung (3.1) selbst. Für $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$ besitzt (4.17) keine Lösungen und für $y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ gibt es unendlich viele Lösungen, falls der Operator nicht injektiv ist. Da aus $R(A) \neq \overline{R(A)}$ auch $R(A^*A) \neq \overline{R(A^*A)}$ folgt, ist (4.17) gleichermaßen inkorrekt nach Nashed wie das Ausgangsproblem (3.1). Wenn für kompakte Operatoren A mit der Singulärwertfolge $\{\sigma_j\}$ die Gleichung (3.1) einen Grad $\nu > 0$ der Inkorrektheit hat, so hat die Normalgleichung mit der Singulärwertfolge $\{\sigma_j^2\}$ des Operators A^*A sogar einen doppelt so hohen Inkorrektheitsgrad 2ν (siehe Formel (3.44)). Jedoch lässt sich unter Verwendung des Einheitsoperators I in X zu (4.17) leicht eine Familie von Nachbaraufgaben

$$(A^*A + \alpha I)x = A^*y_\delta, \quad x \in X \quad (4.18)$$

angeben, wobei jede solche zu einem festen Parameter $\alpha > 0$ gehörige lineare Operatorgleichung (4.18) korrekt nach Hadamard ist. Auf der Bestimmung von Lösungen x_α^δ (siehe später die Formel (4.22)) solcher korrekter Ersatzprobleme beruht die Methode der Tichonov-Regularisierung. Aufbauend auf Arbeiten von Tichonov aus den 60er Jahren wurde diese Methode in den letzten Jahrzehnten zu dem Standardwerkzeug der Regularisierung inverser Probleme entwickelt.

Lemma 20 *Ein selbstadjungierter Operator $B \in \mathcal{L}(X, X)$, der im Hilbertraum positiv definit ist, d.h. es gilt eine Ungleichung*

$$\langle Bx, x \rangle_X \geq \beta \|x\|_X^2$$

für alle $x \in X$ mit $\beta > 0$, besitzt einen stetigen inversen Operator $B^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ mit $\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{1}{\beta}$. Weiterhin ist für jedes feste $z \in X$ das Extremalproblem

$$\langle Bx, x \rangle_X - 2\langle x, z \rangle_X = \min!, \quad x \in X \quad (4.19)$$

äquivalent zur Operatorgleichung

$$Bx = z \quad x \in X \quad (4.20)$$

und besitzt wie diese die eindeutig bestimmte Lösung $x = B^{-1}z$.

Setzt man $B := A^*A + \alpha I$ und $z = A^*y_\delta$, so liefert Lemma 20 mit $\beta = \alpha$ selbst die Korrektheit der Operatorgleichung (4.18) nach Hadamard, d.h. die Existenzbedingung, die Eindeutigkeitsbedingung und die Stabilitätsbedingung sind für diese Gleichung erfüllt. Mehr noch, (4.18) ist äquivalent zur Minimierung des Funktionals

$$\begin{aligned} \langle (A^*A + \alpha I)x, x \rangle_X - 2\langle x, A^*y_\delta \rangle_X &= \langle Ax, Ax \rangle_Y + \langle x, x \rangle_X - 2\langle Ax, y_\delta \rangle_Y \\ &= \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\|x\|_X^2 - \|y_\delta\|_Y^2 \end{aligned}$$

über alle $x \in X$. Da der konstante Term $\|y_\delta\|_Y^2$ keine Rolle spielt, betrachtet man

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y + \alpha\|x\|_X^2 \quad (4.21)$$

als Tichonov-Funktional, und die regularisierte Lösung nach Tichonov

$$x_\alpha^\delta := R_\alpha y_\delta := (A^*A + \alpha I)^{-1} A^* y_\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \quad (4.22)$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung des Extremalproblems

$$T_\alpha(x) := \|Ax - y_\delta\|_Y + \alpha\|x\|_X^2 = \min!, \quad x \in X. \quad (4.23)$$

Die Tichonov-Regularisierung liefert wegen (4.22) eine Näherungsvorschrift (4.11) mit der positiven Filterfunktion

$$f(\alpha, \sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha} \quad \text{für alle } \alpha > 0 \text{ und } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \quad (4.24)$$

Die Filterfunktion (4.24) erfüllt offensichtlich die Bedingungen (4.12) und (4.14). Wegen $\sigma^2 + \alpha \geq 2\sqrt{\alpha}\sigma$ gilt

$$\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha} \leq \frac{\sigma}{2\sqrt{\alpha}}$$

und damit (4.13) mit $K(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. Wählt man den Regularisierungsparameter α der Tichonov-Regularisierung $\alpha(\delta)$ so aus, dass $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ und $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0$ bzw. damit gleichwertig $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ erreicht wird, so erfüllt eine solche Apriori-Parameterwahl die Grenzwertbedingungen (4.8) und (4.9) aus Theorem 19. Als Konsequenz von Theorem 20 ergibt sich:

Folgerung 9 *Die zur Methode der Tichonov-Regularisierung in Formel (4.22) definierte Operatorfamilie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ ist eine lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger mit $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. Sofern eine Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$ die Bedingungen*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.25)$$

befriedigt, ist diese Regularisierung konvergent.

Um die Konvergenzbedingung (4.25) zu erfüllen, muss α mit δ gegen Null gehen. Dies darf aber nicht zu schnell geschehen. α muss langsamer gegen Null gehen als δ^2 . Die zugehörige Filterfunktion hat die Eigenschaften eines Tiefpassfilters. Bei festem Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ fällt der Dämpfungsfaktor $f(\alpha, \sigma_j)$ umso kleiner aus, je größer j wird, da die Singulärwertfolge von A eine fallende Nullfolge verkörpert.

Die Summanden der Reihe (4.10) mit großem j werden beim Übergang zu (4.22) stark gedämpft. Dies betrifft in der Regel die hochfrequenten Anteile der Lösungen (siehe Beispiele in 3.1.5). Dagegen werden die vorderen Reihenglieder oder Hauptkomponenten der Lösung mit kleinem j wegen

$$\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha} \approx 1$$

für genügend kleine α nahezu unverändert gelassen. Die Hauptkomponenten verkörpern in der Regel die niederfrequenten Anteile der Lösung. Man rekonstruiert also mit Hilfe der Tichonov-Regularisierung die niederfrequenten Anteile in der Minimum-Norm-Lösung $A^\dagger y$ recht genau und auch stabil in bezug auf Fehler in den Daten. Dagegen wird auf die hochfrequenten Anteile mit zunehmender Frequenz immer mehr verzichtet. Dieser Philosophie

bedienen sich die meisten Regularisierungsverfahren. Insofern ist es nicht verwunderlich, dass standardmäßig eingesetzte Regularisierungsmethoden wenig erfolgreich sind, wenn hochfrequente Lösungen gesucht werden. Spezielle Informationen über die Lösung oder die Datenstruktur erfordern daher manchmal besondere Regularisierungszugänge.

Wir betrachten nun einige weitere Eigenschaften der Tichonov-Regularisierung. Die regularisierte Lösung x_α^δ (siehe Formel (4.22)) hängt wegen der Beschränktheit des Operators R_α stetig von den Daten y_δ ab. Eine stetige Abhängigkeit ergibt sich aber auch bezüglich des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$, denn die regularisierte Lösung genügt der Gleichung

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha^\delta = A^*y_\delta. \quad (4.26)$$

Betrachtet man zusätzlich $(A^*A + (\alpha + h)I)x_{\alpha+h}^\delta = A^*y_\delta$ mit $\alpha + h > 0$, so gilt

$$(A^*A + \alpha I)(x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta) = -hx_{\alpha+h}^\delta = \frac{h}{\alpha + h}A^*(Ax_{\alpha+h}^\delta - y_\delta)$$

und

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta\|_X &\leq \frac{|h|}{\alpha + h} \|(A^*A + \alpha I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|A^*\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|Ax_{\alpha+h}^\delta - y_\delta\|_Y \\ &\leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\alpha} \frac{|h|}{\alpha + h} (\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x_{\alpha+h}^\delta\|_X + \|y_\delta\|_Y). \end{aligned}$$

Nun ist wegen $T_\alpha(x_\alpha^\delta) \leq T_\alpha(0)$ für alle $\alpha > 0$ auch

$$(\alpha + h)\|x_{\alpha+h}^\delta\|_X^2 \leq T_{\alpha+h}(x_\alpha^\delta) \leq \|y_\delta\|_Y^2$$

und damit

$$\|x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta\|_X \leq \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\alpha} \frac{|h|}{\alpha + h} \left(\frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\sqrt{\alpha + h}} + 1 \right) \|y_\delta\|_Y \rightarrow 0 \quad \text{für } |h| \rightarrow 0.$$

Dann existiert wegen

$$(A^*A + \alpha I) \frac{x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta}{h} = -x_{\alpha+h}^\delta$$

sogar ein Ableitungselement

$$\frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{\alpha+h}^\delta - x_\alpha^\delta}{h} \in X,$$

welches die lineare Operatorgleichung

$$(A^*A + \alpha I) \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = -x_\alpha^\delta \quad (4.27)$$

löst und folglich die Darstellung

$$\frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = -(A^*A + \alpha I)^{-1} x_\alpha^\delta \quad (4.28)$$

besitzt. Die regularisierte Lösung hängt also sogar stetig differenzierbar vom Regularisierungsparameter ab. Für die Entwicklung sinnvoller Strategien einer A-posteriori-Parameterwahl bei der Tichonovregularisierung ist es nützlich, die Funktionen

$$\varphi(\alpha) := \|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y^2 \quad \text{und} \quad \psi(\alpha) := \|x_\alpha^\delta\|_X^2 \quad (4.29)$$

näher zu betrachten. Die erste Funktion charakterisiert das Defektnormquadrat der regularisierten Lösung als Funktion des Regularisierungsparameters und die zweite bringt die Abhängigkeit der regularisierten Lösung selbst zum Ausdruck. Wir studieren das Monotonieverhalten der Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$. Aufgrund von (4.26) gilt

$$\varphi'(\alpha) = 2 \left\langle A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, Ax_\alpha^\delta - y_\delta \right\rangle_Y = 2 \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, A^*(Ax_\alpha^\delta - y_\delta) \right\rangle_X = -2\alpha \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, x_\alpha^\delta \right\rangle_X$$

und mit (4.28) folgt

$$\varphi'(\alpha) = 2\alpha^2 \left\| \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X^2 + 2\alpha \left\| A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_Y^2 \geq 0, \quad (4.30)$$

d.h. die Funktion ist monoton nichtfallend. Für $y_\delta \notin N(A^*)$ gilt mit $\varphi'(\alpha)$ sogar strenge Monotonie für φ Andererseits ist

$$\psi'(\alpha) = 2 \left\langle \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha}, x_\alpha^\delta \right\rangle_X = -2 \left\| \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X^2 - 2 \left\| A \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_Y^2 \leq 0,$$

d.h. die Funktion ist monoton nichtwachsend, und für $y_\delta \notin N(A^*)$ gilt wieder $\psi'(\alpha) > 0$ und damit strenge Monotonie.

Wir setzen für die weiteren Betrachtungen $N(A^*) = \{0\}$ voraus und damit streng monotone Funktionen $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$. Wegen $N(A^*) = \{0\}$ gilt die Formel

$$\|y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2.$$

Daraus folgern wir zunächst

$$\|Ax_\alpha^\delta - y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \alpha} - 1 \right)^2 \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\sigma_j^2 + \alpha)^2} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \leq \|y_\delta\|_Y^2$$

und anschließend die Vertauschbarkeit von Summation und Grenzübergang in der Reihendarstellung von $\|Ax_\alpha^\delta\|_Y^2$. Wir erhalten die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varphi(\alpha) = \|y_\delta\|_Y^2. \quad (4.31)$$

Die entsprechenden Grenzwertbeziehungen für $\psi(\alpha)$ werden in Aufgabe 4.1 formuliert.

Definition: Gegeben seien ein Datenfehlerniveau $\delta > 0$ und eine gestörte rechte Seite $y_\delta \in Y$ der linearen Operatorgleichung (3.1) mit exakter rechter Seite $y \in R(A)$, wobei die Ungleichung

$$\|y - y_\delta\|_Y \leq \delta < \|y_\delta\|_Y \quad (4.32)$$

erfüllt werde. Unter dem Diskrepanzprinzip verstehen wir dann eine A-posteriori-Parameterwahl $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$ des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$ der Tichonov-Regularisierung (4.22), die auf der Lösung der Gleichung

$$\|Ax_{dis} - y_\delta\|_Y = \delta \quad (4.33)$$

beruht.

Mit $N(A) = \{0\}$ und (4.32) liefert das Diskrepanzprinzip einen eindeutig bestimmten Regularisierungsparameter α_{dis} . Das kann man wie folgt sehen. Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ($\alpha > 0$) ist streng monoton und erfüllt die Grenzwertbeziehungen (4.31). Wegen dem zweiten Grenzwert ist $\varphi(\alpha)$ für große α größer als δ und wegen dem ersten für kleine α kleiner. Das eben definierte Diskrepanzprinzip geht auf Morozov zurück. Es beruht auf der heuristisch motivierten Idee unter den im Sinne von $\|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta$ mit den Daten verträglichen Lösungen solche Elemente zu bevorzugen, bei denen diese Ungleichung sogar als Gleichung erfüllt ist. Natürlich sind auch Fälle denkbar, in denen kleinere Regularisierungsparameter bessere Lösungen generieren. Das ist zum Beispiel dann der Fall, wenn das δ nur als maximaler Messfehler bekannt ist und der reale deutlich kleiner ist. In diesen Fällen ist das Diskrepanzprinzip überregularisierend. Es produziert zu große Regularisierungsparameter und

zu glatte Lösungen. Im Gegensatz dazu führt eine Unterregularisierung zu zu kleinen Regularisierungsparametern und zu stärker oszillierenden Lösungen.

Eine Motivation für das Diskrepanzprinzip liefert die folgende Tatsache. Die regularisierte Lösung $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ mit $\|Ax_{\alpha_{dis}} - y_\delta\|_Y = \delta$ löst das restringierte Extremalproblem

$$\|x\|_X = \min! \quad x \in X : \|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta. \quad (4.34)$$

Wäre nämlich $\|\tilde{x}\|_X \leq \|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X$ für ein $\tilde{x} \in X$ mit $\|A\tilde{x} - y_\delta\|_Y \leq \delta$, so müsste auch

$$T_{\alpha_{dis}}(\tilde{x}) = \|A\tilde{x} - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|\tilde{x}\|_X^2 < \|Ax_{\alpha_{dis}}^\delta - y_\delta\|_Y^2 + \alpha_{dis}\|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X^2 \leq T_{\alpha_{dis}}(x_{\alpha_{dis}}^\delta)$$

gelten. Dies widerspricht aber der Optimalität von $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ für das Tichonov-Funktional. Übrigens ist auch umgekehrt jede Lösung von (4.34) eine regularisierte Lösung (siehe Aufgabe 4.2).

Mit dem Sympathiefunktional $\Omega(x) = \|x\|_X$ und $D = X$ ist das Extremalproblem (4.34) eine Konkretisierung von Problem (2.42), wobei datenkompatibel $\|Ax - y_\delta\|_Y \leq \delta$ bedeutet. Wenn der Regularisierungsparameter über das Diskrepanzprinzip bestimmt wird, dann minimiert jede Lösung $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ das Sympathiefunktional $\Omega(x)$ unter allen mit den Daten verträglichen Elementen $x \in X$. Die Tichonov-Regularisierung erzwingt also nicht nur Näherungslösungen, die stabil von den Daten abhängen, sondern sie beeinflusst auch die Eigenschaften der Näherungslösung zielgerichtet. Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass eine regularisierte Lösung $x_{\alpha_0}^\delta$ mit $\|x_{\alpha_0}^\delta\|_X = K$ auch Lösung des Extremalproblems

$$\|Ax - y_\delta\|_Y = \min! \quad x \in X : \|x\|_X \leq K \quad (4.35)$$

ist. Die regularisierten Lösungen haben also minimale Defektnormen, wenn bei einer solchen Minimierung nur Elemente aus einer Kugel im Hilbertraum X mit festem Radius $K > 0$ zugelassen werden.

Wir wollen uns nun noch der Frage zuwenden, welchen Aufwand die Bestimmung der regularisierten Lösung $x_{\alpha_{dis}}$ auf der Grundlage des Diskrepanzprinzips erfordert. Für jeden festen Regularisierungsparameter muss eine korrekte lineare Operatorgleichung (4.18) gelöst werden, um x_α^δ zu bestimmen. Unter Ausnutzung des streng monotonen Wachstums der Funktion

$\varphi(\alpha)$ kann man die Gleichung (4.33) näherungsweise mit hinreichender Genauigkeit lösen. Ausgehend von einem Startwert α_0 wir dazu eine geeignete Folge von Regularisierungsparametern $\{\alpha_n\}$ konstruiert, die den gewünschten Parameter α_{dis} gut approximieren. Mit $\varphi(\alpha) > \delta^2$ kann man eine Parameterfolge $\alpha_n := 2^{-n}\alpha_0$ als einfachste Variante betrachten und dabei das eindeutig bestimmte Folgeelement α_k als Näherung für α_{dis} verwenden, das der Beziehung

$$\varphi(\alpha_k) \leq \delta^2 < \varphi(\alpha_{k-1})$$

genügt. Damit kann man nun ein Bisektionsverfahren aufbauen. Da aber die Berechnung eines Funktionswertes $\varphi(\alpha_n)$ immer die Lösung einer Operatorgleichung (4.18) erfordert, sollte die Anzahl von benötigten Regularisierungsparametern möglichst klein gehalten werden. Das legt die Benutzung eines schnell konvergierenden Iterationsverfahrens für die Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$\tilde{\varphi}(\alpha) := \varphi(\alpha) - \delta^2 = 0 \quad (4.36)$$

in einer reellen Veränderlichen nahe, wobei aufgrund der expliziten Berechenbarkeit von $\varphi'(\alpha)$ das Newton-Verfahren geeignet erscheint. Dessen direkte Anwendung auf Gleichung (4.36) macht jedoch Probleme, weil die Funktion $\tilde{\varphi}(\alpha)$ für kleine α konvex und für große α konkav ist. Wesentlich günstiger ist es mit $\beta = 1/\alpha$ von der Gleichung

$$\hat{\varphi}(\beta) := \varphi(1/\beta) - \delta^2 = \|Ax_{1/\beta}^\delta - y_\delta\|_Y^2 - \delta^2 = 0 \quad (4.37)$$

auszugehen. Diese Funktion ist für $\beta > 0$ monoton fallend und streng konvex (siehe Aufgabe 4.3). Daher liefert die Newton-Iteration

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\hat{\varphi}(\beta_n)}{\hat{\varphi}'(\beta_n)} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (4.38)$$

ausgehend von einem kleinen β_0 mit $\hat{\varphi}(\beta) > 0$ eine monoton gegen die einzige Nullstelle $\beta_{dis} = 1/\alpha_{dis}$ von Gleichung (4.37) wachsende Iterationsfolge. Der wesentliche Aufwand eines Newton-Schrittes besteht in der zur Berechnung von $\hat{\varphi}(\beta_n)$ und $\hat{\varphi}'(\beta_n)$ erforderlichen Lösung der Operatorgleichungen (4.18) und (4.27) mit entsprechendem Regularisierungsparameter.

Bevor wir uns dem Konvergenzverhalten des Diskrepanzprinzips zuwenden, sei mit dem Prinzip der Quasioptimalität noch ein weiteres Kriterium zur

Auswahl des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$ bei der Tichonov-Regularisierung kurz erwähnt, welches nicht selten sehr brauchbare regularisierte Lösungen $x_{\alpha_{q_0}}^\delta$ liefert. Der Parameter α_{q_0} löst dabei das Extremalproblem

$$\xi(\alpha) = \left\| \alpha \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X \rightarrow \min!, \quad \alpha > 0. \quad (4.39)$$

Aus Gleichung (4.28) erhält man die Beziehung

$$\alpha \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} = -\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}x_\alpha^\delta.$$

Eine Motivation für das Extremalproblem (4.39) entnimmt man der auf der Neumannschen Reihe beruhenden und für $y \in R(A)$ gültigen Gleichung

$$A^\dagger y = x_\alpha + \alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}x_\alpha + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha^j (A^*A + \alpha I)^{-j}x_\alpha, \quad (4.40)$$

bei welcher unter Vernachlässigung der unendlichen Summe in (4.40) ohne Berücksichtigung von Datenfehlern die Differenz $\|x_\alpha - A^\dagger y\|_X$ klein bleibt, wenn $\left\| \alpha \frac{dx_\alpha^\delta}{d\alpha} \right\|_X$ minimiert wird.

Die Funktion $\xi(\alpha)$ weist häufig einen ähnlichen Verlauf wie die Fehlerfunktion $\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X$ auf und besitzt mit α_{q_0} in diesen Fällen ein globales Minimum, dass dem optimalen Regularisierungsparameter α_{opt} sehr nahe kommt. Leider zeigt die Funktion $\xi(\alpha)$ manchmal einen “welligen“ Verlauf und besitzt zahlreiche relative Minima, was die sichere Parameterwahl nach dem Prinzip der Quasioptimalität erschwert. Praktisch löst man gern eine diskrete Version von (4.39), indem man aus einer Parameterfolge $\alpha = 2^{-n}\alpha_0$ das Folgeelement auswählt, welches $\|x_{\alpha_{k+1}}^\delta - x_{\alpha_k}^\delta\|_X$ minimiert. Man wählt also in der zu einer solchen Parameterfolge gehörigen Folge regularisierter Lösungen eine solche aus, die sich von ihrem Nachbarlement wenig unterscheidet, also am wenigsten sensibel auf Parameteränderungen reagiert. Deshalb wird dieses Prinzip manchmal auch als Sensitivitätsprinzip bei der Wahl des Regularisierungsparameters bezeichnet.

Theorem 21 *Unter den Voraussetzungen $N(A^*) = \{0\}$ und (4.32) ist die Methode der Tichonov-Regularisierung (4.22) mit Regularisierungsparametern $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$, die nach dem Diskrepanzprinzip (4.33) ausgewählt werden, eine konvergente Regularisierung für A^\dagger .*

Wir betrachten dazu Folgen $\delta_n \rightarrow 0$ und $y_n := y_{\delta_n} \rightarrow y \in R(A)$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $x_n := x_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}$. Die Aussage von Theorem 21 ist gültig, wenn für $n \rightarrow \infty$ stets $x_n \rightarrow A^\dagger y$ gilt. Nun haben wir $\|Ax_n - y_n\|_Y = \delta_n$ und folglich $Ax_n \rightarrow y$ für $n \rightarrow \infty$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} T_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}(x_n) &= \|Ax_n - y_n\|_Y^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n)\|x_n\|_X^2 \\ &= \delta_n^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n)\|x_n\|_X^2 \\ &\leq T_{\alpha_{dis}(\delta_n, y_n)}(A^\dagger y) \\ &= \|y - y_n\|_Y^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n)\|A^\dagger y\|_X^2 \\ &\leq \delta_n^2 + \alpha_{dis}(\delta_n, y_n)\|A^\dagger y\|_X^2 \end{aligned}$$

und damit $\|x_n\|_X \leq \|A^\dagger y\|_X$ für alle n . Eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ konvergiert in X dann schwach gegen ein Element $\bar{x} \in X$. Wegen der schwachen Stetigkeit von A und der Eindeutigkeit des Grenzwertes gilt $A\bar{x} = y$. Aus $\|\bar{x}\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\|_X \leq \|A^\dagger y\|_X$ folgt $\bar{x} = A^\dagger y$ für $n \rightarrow \infty$ und damit insgesamt $x_n \rightarrow A^\dagger y$. Nun haben wir mit

$$\|A^\dagger y\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \leq \|A^\dagger y\|_X$$

noch $\|x_n\|_X \rightarrow \|A^\dagger y\|_X$ und damit $x_n \rightarrow A^\dagger y$ für $n \rightarrow \infty$.

Im Abschnitt 3.2.2 hatten wir im Zusammenhang mit nichtlinearen inversen Problemen den Begriff der Quelldarstellung eingeführt (Formel (3.70)). Es ergab sich, dass inkorrekte Probleme durch Einschränkung auf Lösungsbereiche, in denen solche Quelldarstellungen gelten, korrekt werden. Mit dem gleichen Hintergrund lassen sich, wie im folgenden ausgeführt wird, für die Tichonov-Regularisierung linearer inkorrektur Operatorgleichungen bei Gültigkeit gemeinsamer Quelldarstellungen Konvergenzraten erreichen.

Theorem 22 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 21 gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass die auf Grundlage des Diskrepanzprinzips gewonnenen regularisierten Lösungen $x_{\alpha_{dis}}^\delta$ mit $\alpha_{dis} = \alpha_{dis}(\delta, y_\delta)$ die Abschätzung*

$$\|x_{\alpha_{dis}}^\delta - x_{mn}\|_X \leq C\sqrt{\delta} \quad (4.41)$$

befriedigen, falls die Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ von Gleichung (3.1) einer Quelldarstellung

$$x_{mn} = A^* w \quad (w \in Y) \quad (4.42)$$

genügt.

Wir zeigen die Gültigkeit dieser Aussage, indem wir uns an die Ungleichung

$$\|x_{\alpha_{dis}}^\delta\|_X \leq \|x_{mn}\|_X$$

aus dem Beweis von Theorem 21 erinnern. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_{\alpha_{dis}}^\delta - x_{mn}\|_X^2 &\leq 2(\|x_{mn}\|_X^2 - \langle x_{\alpha_{dis}}^\delta, x_{mn} \rangle_X) \\ &= 2\langle x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta, x_{mn} \rangle_X \\ &= 2\langle x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta, A^*w \rangle_X \\ &= 2\langle A(x_{mn} - x_{\alpha_{dis}}^\delta), w \rangle_Y \\ &= 2\langle y - y_\delta, w \rangle_Y + 2\langle y_\delta - Ax_{\alpha_{dis}}^\delta, w \rangle_Y \\ &\leq 2(\|y - y_\delta\|_Y \|w\|_Y + \|y_\delta - Ax_{\alpha_{dis}}^\delta\|_Y \|w\|_Y) \\ &\leq 4\|w\|_Y \delta. \end{aligned}$$

Das liefert die Ungleichung (4.41) mit $C = 2\sqrt{\|w\|_Y}$.

Falls die Operatorgleichung (3.1) inkorrekt nach Nashed ist, so kann der Regularisierungsfehler $\|x_{\alpha_{dis}}^\delta - x_{mn}\|_X$ des Diskrepanzprinzips für $\delta \rightarrow 0$ nicht schneller als $\sqrt{\delta}$ gegen Null streben. Es gibt jedoch Quelldarstellungen, die eine Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$ ermöglichen, so dass sich der Regularisierungsfehler proportional zu $\delta^{2/3}$ verhält.

Theorem 23 *Es seien c und C positive Konstanten. Dann erhält man für die Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta) = c\delta^{2/3}$ eine Abschätzung*

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq C\delta^{2/3} \quad (4.43)$$

des Regularisierungsfehlers, wenn die Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ von Gleichung (3.1) eine Quelldarstellung

$$x_{mn} = A^*Av \quad (v \in X) \quad (4.44)$$

besitzt.

Zum Beweis gehen wir von einer Abschätzung für $R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*A$ aus. Wegen (4.44) gilt

$$\begin{aligned} R_\alpha y - x_{mn} &= (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*Ax_{mn} - x_{mn} \\ &= (A^*A + \alpha I)^{-1}(A^*A - (A^*A + \alpha I))x_{mn} \\ &= -\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}x_{mn} \\ &= -\alpha(A^*A + \alpha I)^{-1}A^*Av. \end{aligned}$$

Aus der Spektraldarstellung von $(A^*A + \alpha I)^{-1}A^*A$ folgert man

$$\|(A^*A + \alpha I)^{-1}A^*A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1$$

und daraus

$$\|R_\alpha y - x_{mn}\|_X \leq \alpha \|v\|_X.$$

Auf der Grundlage von Formel (4.6) schätzen wir den Regularisierungsfehler ab. Für die Norm von R_α benutzen wir die Formel aus Folgerung 9. Wir haben dann

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\delta + \alpha \|v\|_X \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \alpha \|v\|_X$$

und mit $\alpha = c\delta^{2/3}$ eine Ungleichung

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq C\delta^{2/3},$$

wobei $C = \frac{1}{2\sqrt{c}} + c\|v\|_X$ gilt. Damit ist Theorem 23 bewiesen.

Im Zusammenhang mit Theorem 23 lässt sich aber auch ein Sättigungssatz beweisen, der besagt, dass für nach Nashed inkorrekte lineare Gleichungen (3.1) keine Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$ existiert, so dass der Fehler der Tichonov-Regularisierung für $\delta \rightarrow 0$ schneller als $\delta^{2/3}$ gegen die Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} \neq 0$ konvergiert.

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir uns nun am Beispiel der linearen Fredholmschen Integralgleichung erster Art

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t) dt = y(s) \quad (c \leq s \leq d) \quad (4.45)$$

anschauen, welche konkreten Probleme bei der Bestimmung der regularisierten Lösung x_α aus der Gleichung

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha = A^*y \quad (4.46)$$

zu lösen sind. Wir betrachten in diesem Zusammenhang zwei verschiedene Fälle der Wahl des Lösungsraumes X , wobei der Raum der Daten mit $L^2(c, d)$ festgehalten wird. Im ersten Fall sei

$$X := L^2(a, b), Y := L^2(c, d) \text{ und } k \in L^2((a, b) \times (c, d)). \quad (4.47)$$

Wir wissen aus Lemma 3, dass der dann betrachtete lineare Fredholmsche Integraloperator $A \in \mathcal{L}(L^2(a, b), L^2(c, d))$ kompakt ist. Der zu A adjungierte Operator A^* besitzt die Form

$$(A^*y)(t) = \int_c^d k(s, t)y(s) ds \quad (a \leq t \leq b)$$

und der zusammengesetzte Operator $A^*A \in \mathcal{L}(L^2(a, b), L^2(a, b))$ lässt sich darstellen als

$$(A^*Ax)(t) = \int_a^b \tilde{k}(t, \tau)x(\tau) d\tau \quad (a \leq t \leq b)$$

mit dem integrierten Kern

$$\tilde{k}(t, \tau) = \int_c^d k(s, t)k(s, \tau) ds \quad ((t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]). \quad (4.48)$$

Damit erhält die Gleichung (4.46) für alle $\alpha > 0$ die Gestalt einer linearen Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$\int_a^b \tilde{k}(t, \tau)x_\alpha(\tau) d\tau + \alpha x_\alpha(t) = \int_c^d k(s, t)y(s) ds \quad (a \leq t \leq b), \quad (4.49)$$

die für alle $y \in L^2(c, d)$ eindeutig bestimmte Lösungen liefert.

Im zweiten Fall werde

$$X := H^1(a, b), Y := L^2(c, d) \text{ und } k \in L^2((a, b) \times (c, d)). \quad (4.50)$$

betrachtet. Um beide Fälle besser unterscheiden zu können, bezeichnen wir im zweiten Fall die regularisierte Lösung mit \tilde{x}_α und den kompakten Operator aus (4.45) mit $\tilde{A} \in \mathcal{L}(H^1(a, b), L^2(c, d))$, wobei mit der Darstellung $\tilde{A} = AB$ der Zusammenhang zum Integraloperator aus dem ersten Fall hergestellt wird. Dabei ist B der im Anschluss an Formel (3.60) eingeführte kompakte Einbettungsoperator vom Raum $H^1(a, b)$ in den Raum $L^2(a, b)$. Die Gleichung (4.46) mit \tilde{A} anstelle von A lässt sich dann in der schwachen Formulierung

$$\langle \tilde{A}^* \tilde{A} \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} = \langle \tilde{A}^* y, z \rangle_{H^1(a, b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b)$$

und damit gleichwertig in der Form

$$\langle A \tilde{x}_\alpha, Az \rangle_{L^2(c, d)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a, b)} = \langle y, Az \rangle_{L^2(c, d)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b)$$

bzw.

$$\langle A^* A \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a,b)} = \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a,b)} \quad \text{für alle } z \in H^1(a,b) \quad (4.51)$$

aufschreiben. Mit $\tilde{x}_\alpha \in H^1(a,b)$ gilt auch $\tilde{x}_\alpha \in C[a,b]$ und $\tilde{x}'_\alpha \in L^2(a,b)$. Wir betrachten die Funktionen

$$f(t) = \int_t^b ((A^* A \tilde{x}_\alpha)(s) + \alpha \tilde{x}_\alpha(s) - (A^* y)(s)) ds \quad (a \leq t \leq b)$$

und

$$g(t) = \int_a^t (\alpha \tilde{x}'_\alpha(s) + f(s)) ds \quad (a \leq t \leq b).$$

Es ist $f \in C^1[a,b]$ wegen der Stetigkeit des Kernes k und $g \in H^1(a,b)$. Wegen $f(b) = g(a) = 0$ und Formel (4.51) erhalten wir durch partielle Integration die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha \tilde{x}'_\alpha(t) + f(t))^2 dt &= \int_a^b g'(t)(\alpha \tilde{x}'_\alpha(t) + f(t)) dt \\ &= \alpha \int_a^b g'(t) \tilde{x}'_\alpha(t) dt - \int_a^b g(t) f'(t) dt \\ &= \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, g \rangle_{H^1(a,b)} + \langle A^* A \tilde{x}_\alpha, g \rangle_{L^2(a,b)} - \langle A^* y, g \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\alpha \tilde{x}'_\alpha = -f \in C^1[a,b]$ und damit ist $\tilde{x}_\alpha \in C^2[a,b]$, also zweimal stetig differenzierbar. Mit

$$\alpha \tilde{x}''_\alpha = -f' = A^* A \tilde{x}_\alpha + \alpha \tilde{x}_\alpha - A^* y$$

gilt daher die Integrodifferentialgleichung

$$\int_a^b \tilde{k}(t, \tau) \tilde{x}_\alpha(\tau) d\tau + \alpha(\tilde{x}_\alpha(t) - \tilde{x}''_\alpha(t)) = \int_c^d k(s, t) y(s) ds \quad (a \leq t \leq b). \quad (4.52)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{H^1(a,b)} &= \int_a^b (\tilde{x}_\alpha(t) z(t) + \tilde{x}'_\alpha(t) z'(t)) dt \\ &= \langle \tilde{x}_\alpha - \tilde{x}''_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} + \tilde{x}'_\alpha(b) z(b) - \tilde{x}'_\alpha(a) z(a) \end{aligned}$$

liefert die Gleichung (4.51)

$$\begin{aligned} \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a,b)} &= \langle A^* A \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} \\ &= \langle A^* y, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \langle \tilde{x}_\alpha - \tilde{x}''_\alpha, z \rangle_{L^2(a,b)} + \alpha \tilde{x}'_\alpha(b) z(b) - \alpha \tilde{x}'_\alpha(a) z(a) \end{aligned}$$

und damit

$$\tilde{x}'_\alpha(b)z(b) - \alpha\tilde{x}'_\alpha(a)z(a) = 0 \quad \text{für alle } z \in H^1(a, b).$$

Hieraus ergeben sich die natürlichen Randbedingungen

$$\tilde{x}'_\alpha(a) = \tilde{x}'_\alpha(b) = 0. \quad (4.53)$$

Jede in $H^1(a, b)$ regularisierte Lösung \tilde{x}_α von (4.45) befriedigt auch automatisch homogene Randbedingungen für die erste Ableitung an beiden Intervallenden. Dies ist eine durch die Tichonov-Regularisierung subjektiv in die Näherungslösung hineingetragene Eigenschaft, die gegebenenfalls zu wesentlichen Verzerrungen der regularisierten Lösung an den Rändern des Intervalls $[a, b]$ führen kann. Abschließend sei zum Fall $X = H^1(a, b)$ erwähnt, dass eine regularisierte Lösung \tilde{x}_α mit $\|\tilde{x}_\alpha\|_{H^1(a, b)} = K$ auch Lösung des restringierten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|\tilde{A}x - y_\delta\|_{L^2(c, d)}^2 = \min!, \quad x \in D = \{x \in H^1(a, b) : \|x\|_{H^1(a, b)} \leq K\} \quad (4.54)$$

ist. Die dabei in Formel (4.54) auftretende Restriktionsmenge D ist relativ kompakt in $L^2(a, b)$ (siehe Lemma 7).

Die hier in Ansätzen vorgestellte Theorie der Tichonov-Regularisierung für lineare Operatorgleichungen (3.1) kann auch auf den Fall zugeschnitten werden, dass anstelle von (4.23) ein Extremalproblem der Gestalt

$$T_\alpha(x) = \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\Omega(x) = \min!, \quad x \in X \quad (4.55)$$

mit Ω aus einer allgemeineren Klasse von Sympathiefunktionalen betrachtet wird. Zur möglichen Wahl solcher Sympathiefunktionale sei auf Abschnitt 2.5.1 verwiesen. Weiterhin ist eine Einbeziehung restringierter Probleme in der Form

$$T_\alpha(x) = \|Ax - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\Omega(x) = \min!, \quad x \in D \subset X \quad (4.56)$$

mit konvexen abgeschlossenen Mengen D möglich. Die Tichonov-Regularisierung erweist sich dabei stets als eine Strafenmethode, bei der das Defektnormquadrat auf der Grundlage eines nichtlinearen Sympathiefunktionalen Ω mit einer Strafe beauftragt wird. Der Regularisierungsparameter α spielt dabei die Rolle eines Strafparameters. Je größer dieser gewählt wird, um so härter fällt die Strafe aus.

4.1.3 Alternative Regularisierungsmethoden

Nachdem wir die Tichonov-Regularisierung ausführlich betrachtet haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt drei weiteren Regularisierungsmethoden zuwenden. Diese lassen sich bei Wahl geeigneter Filterfunktionen ebenfalls in das allgemeine Regularisierungsschema (4.11) einordnen. Weitere Details und darüber hinausgehende Methoden findet man in den Büchern von Engl/Hanke/Neubauer und Kirsch.

Eine theoretisch besonders ausgezeichnete Variante liefert die *Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung*

$$x_\alpha^\delta = R_\alpha y_\delta = \sum_{\sigma_j \geq \alpha} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j, \quad y_\delta \in Y. \quad (4.57)$$

Die Formel (4.57) orientiert sich an der Darstellung (3.25) der Moore-Penrose-Inversen, wobei solche Summanden weggelassen werden, deren zugehörige Singulärwerte σ_j kleiner als der Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ sind. Die Zahl der in (4.57) auftretenden Summanden ist offensichtlich endlich. Wir haben es hier mit einem Spezialfall der Formel (4.11) unter Verwendung der nichtnegativen Filterfunktion

$$f(\alpha, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma \geq \alpha \\ 0 & \text{für } \sigma < \alpha \end{cases} \quad (4.58)$$

zu tun. Die Filterfunktion genügt wegen $0 \leq f(\alpha, \sigma) \leq 1$, $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha)\sigma$ mit $K(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$ den Bedingungen (4.12)-(4.14). Als Folgerung von Theorem 20 ergibt sich:

Folgerung 10 *Die zur Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung in Formel (4.57) definierte Operatorfamilie $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ ist eine lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger mit $\|R_\alpha\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{1}{\alpha}$. Sofern eine Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$ die Bedingungen*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.59)$$

befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.

Der entscheidende Vorteil der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung besteht darin, dass die mittels (4.57) gelöste korrekte Ersatzaufgabe zur inkorrekten linearen Operatorgleichung (3.1) bezüglich aller Lösungskomponenten, die zu Singulärwerten $\sigma_j \geq \alpha$ gehören, exakt mit der Ausgangsaufgabe übereinstimmt. In diesen wesentlichen Lösungsanteilen tritt kein Approximationsfehler auf. Dafür werden die übrigen meist hochfrequenten Lösungsanteile gänzlich vernachlässigt. Der auch hier wieder auf der Grundlage heuristischer Kriterien zu bestimmende Regularisierungsparameter α legt dabei die Anzahl der relevanten Lösungskomponenten fest. Leider erfordert die Realisierung der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung umfassende Kenntnisse über das singuläre System des Operators A . Außer den relevanten Werten σ_j werden auch die zugehörigen Eigenelemente u_j und v_j explizit benötigt, um Formel (4.57) auswerten zu können. So treten die theoretischen Vorteile der Methode aufgrund des damit verbundenen enormen Realisierungsaufwandes oft in den Hintergrund, und man entscheidet sich in der Regel für eine aufwandärmere Regularisierungsmethode.

Besonders günstig erscheinen unter diesem Gesichtspunkt iterative Methoden, von denen wir hier speziell die Methode der *Landweber-Iteration* betrachten wollen. Wir gehen dazu von der Normalgleichung (4.17) aus, die wir unter Verwendung einer Relaxationskonstante ω mit $0 < \omega < \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2}$ als Fixpunktgleichung

$$x = (I - \omega A^* A)x + \omega A^* y_\delta$$

in einer iterierfähigen Form schreiben können.

Dabei gilt $q := \|I - \omega A^* A\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$. Den zugehörigen Iterationsprozess

$$x_{n+1} = (I - \omega A^* A)x_n + \omega A^* y_\delta, \quad x_0 = 0 \quad (4.60)$$

bezeichnet man als Landweber-Iteration. Durch Induktion erhält man für die n -te Iterierte die Darstellung

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} (I - \omega A^* A)^i \omega A^* y_\delta \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.61)$$

Wir betrachten zuerst den Fall $y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$. In diesem Fall ist die Normalgleichung (4.17) lösbar, wobei $x_{mn}^\delta := A^\dagger y_\delta$ mit $A^* y_\delta = A^* A x_{mn}^\delta$ die normkleinste Lösung der Normalgleichung ist. Es gilt dann wegen der Identität

$$\sum_{i=0}^{n-1} (I - \omega A^* A)^i \omega A^* A = I - (I - \omega A^* A)^n$$

die Beziehung

$$x_{mn}^\delta - x_n = (I - \omega A^* A)^n x_{mn}^\delta$$

und damit

$$\|x_{mn}^\delta - x_n\|_X \leq q^n \|x_{mn}^\delta\|_X \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall konvergiert die Landweber-Iteration gegen das Element $x_{mn}^\delta = A^\dagger y_\delta$, welches aber wegen der Unbeschränktheit des Operators A^\dagger auch für kleine $\delta > 0$ weit von der tatsächlichen Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ entfernt sein kann. Noch ungünstiger sieht der Fall $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$ aus. Wir setzen in diesem Fall wieder die Kompaktheit des Operators A mit $\dim R(A) = \infty$ voraus und schreiben

$$x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \omega \sigma_j^2)^i \omega \sigma_j \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^n}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j.$$

Wegen $0 < 1 - \omega \sigma_j^2 < 1$ strebt $\|x_n\|_X^2$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2},$$

die aber gegen ∞ divergiert, weil für $y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$ die Picardsche Bedingung (3.23) verletzt ist. Es hat also für inkorrekte Probleme keinen Sinn, eine möglichst große Zahl von Schritten der Landweber-Iteration auszuführen. Wir konzentrieren uns daher auf eine endliche Anzahl N von Iterationsschritten, wobei diese Zahl hier die Rolle des Regularisierungsparameters spielt. Um den Zusammenhang zum allgemeinen Regularisierungsschema herzustellen setzen wir $\alpha = 1/N$. Mit

$$\begin{aligned} x_\alpha^\delta := R_N y_\delta := x_N &:= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^N}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^{1/\alpha}}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \end{aligned} \quad (4.62)$$

erweist sich die N -schrittige Landweber-Iteration als Spezialfall von Formel (4.11), wobei wir für $0 < \omega < \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}^2}$

$$f(\alpha, \delta) = 1 - (1 - \omega \sigma_j^2)^{1/\alpha} \quad \text{für } \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad (4.63)$$

als positive Filterfunktion haben. Diese erfüllt wegen $0 < f(\alpha, \sigma) < 1$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$ die Bedingungen (4.12) und (4.14). Auch die Bedingung (4.13) ist erfüllt, denn es gilt die Ungleichung

$$1 - (1 - \tau)^N \leq \sqrt{\tau N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq \tau \leq 1. \quad (4.64)$$

Mit $\tau = \omega\sigma^2$ ergibt sich aus (4.64) aber

$$\frac{1 - (1 - \omega\sigma^2)^N}{\sigma} \leq \sqrt{\omega N} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{\sigma^2}.$$

Somit ist mit $\alpha = 1/N$ und $K(\alpha) := \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$ die Ungleichung $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha)\sigma$ für $0 < \sigma \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ erfüllt. Wiederum ergibt sich als Folgerung von Theorem 20

Folgerung 11 *Die zur Methode der Landweber-Iteration in Formel (4.62) definierte Operatorfamilie $\{R_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ ist eine lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger mit $\|R_N\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{\omega N}$. Sofern eine Apriori-Parameterwahl $N = N(\delta)$ die Bedingungen*

$$N(\delta) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta^2 N(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{für } \delta \rightarrow 0 \quad (4.65)$$

erfüllt, ist diese Regularisierung auch konvergent.

Um eine Konvergenz der regularisierten Lösungen zu erreichen muss die Anzahl der durchgeführten Iterationen ins Unendliche wachsen. Dies darf aber im Sinne $\delta^2 N(\delta) \rightarrow 0$ in Abhängigkeit von δ nicht zu schnell geschehen.

Auch bei der Landweber-Iteration können heuristische Strategien zur Wahl des Regularisierungsparameters $N = 1/\alpha$ eingesetzt werden. Vorzugsweise verwendet man ein auf Iterationen zugeschnittenes Diskrepanzprinzip. Man wählt dazu N_{dis} für eine gegebene Konstante $\tau > 1$ so, dass

$$\|Ax_{N_{dis}} - y_\delta\|_Y \leq \tau\delta < \|Ax_{N_{dis}-1} - y_\delta\|_Y \quad (4.66)$$

erfüllt wird. Da für $N(A^*) = \{0\}$ die Bedingung $\|Ax_n - y_\delta\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \omega\sigma_j^2)^{2n} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, ist für $\tau\delta < \|y_\delta\|_Y$ der Regularisierungsparameter N_{dis} aus Formel (4.66) stets eindeutig bestimmt. Die regularisierten Lösungen x_N der Methode der Landweber-Iteration werden im Vergleich

zur Tichonov-Regularisierung und zur abgebrochenen Singulärwertentwicklung mit sehr geringem Aufwand erhalten, da weder Operatorgleichungen zu lösen noch Eigenelemente zu bestimmen sind. Der Aufwand reduziert sich im Wesentlichen auf die einmalige Auswertung von A^*y_δ und die Auswertung des Operatorbildes A^*Ax_n in jedem Landweber-Iterationsschritt. Das Diskrepanzprinzip (4.66) ist ebenfalls sehr kostengünstig zu realisieren, da es zusätzlich nur der Defektberechnung der Iterierten von (4.60) erfordert.

Eine dritte Alternative zur Tichonov-Regularisierung bildet die *Methode der asymptotischen Regularisierung*. Diese geht wieder von der Normalgleichung (4.17) aus und stört dieselbe durch Hinzufügen eines Ableitungsterms, wobei mit

$$x'(t) + A^*Ax(t) = A^*y_\delta, \quad x(0) = 0 \quad (4.67)$$

ein Anfangswertproblem zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Lösungselementen $x(t)$ im Hilbertraum X betrachtet wird, deren Variable t sich als Zeit interpretieren lässt. Für den kompakten Operator A kann man unter Verwendung seines singulären Systems die Lösungen von (4.67) als Reihe in der Form

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-t\sigma_j^2)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \quad (t \geq 0) \quad (4.68)$$

darstellen. Man erkennt sofort, dass es keinen Sinn hat, diese Lösungen für große Zeiten t zu bestimmen, denn für $t \rightarrow \infty$ strebt $\|x(t)\|_Y^2$ wieder gegen die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2}$. Man wählt daher eine Endzeit T , die hier die Rolle des Regularisierungsparameters spielt, und betrachtet mit $\alpha := 1/T$ regularisierte Lösungen

$$\begin{aligned} x_\alpha^\delta := R_T y_\delta := x(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-T\sigma_j^2)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2/\alpha)}{\sigma_j} \langle y_\delta, v_j \rangle_Y u_j. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Diese Methode ordnet sich ebenfalls in das allgemeine Regularisierungsschema (4.11) ein. Als Filterfunktionen haben wir dabei

$$f(\alpha, \sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\alpha}\right) \quad \text{für } \alpha > 0 \text{ und } 0 < \sigma < \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \quad (4.70)$$

Mit $0 < f(\alpha, \delta) < 1$ und $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(\alpha, \sigma) = 1$ sind wieder die Bedingungen (4.12) und (4.14) erfüllt. Wir nutzen die für alle positiven α und σ erfüllte Ungleichung

$$\frac{1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\alpha}\right)}{\sigma} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (4.71)$$

(siehe Aufgabe 4.4) und erhalten damit weiterhin die Bedingung (4.13) in der Form $|f(\alpha, \sigma)| \leq K(\alpha)\sigma$ mit $K(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Auch hier lässt sich eine Folgerung aus Theorem 20 ableiten:

Folgerung 12 *Die zur Methode der asymptotischen Regularisierung in Formel (4.69) definierte Operatorfamilie $\{R_T\}_{T>0}$ ist eine lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger mit $\|R_T\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \sqrt{T}$. Sofern eine Apriori-Parameterwahl $T = T(\delta)$ die Bedingungen*

$$T(\delta) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \delta^2 T(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.72)$$

befriedigt, ist diese Regularisierung auch konvergent.

Die Endzeit $T(\delta)$ bis zu der das Anfangswertproblem (4.67) gelöst wird, sollte also unbeschränkt wachsen. Das darf wieder nicht zu schnell geschehen. Abschließend sei der enge Zusammenhang zwischen der Landweber-Iteration und der asymptotischen Regularisierung vermerkt. Betrachtet man nämlich $t_n = n\omega$ und $x_n = x(t_n)$ und ersetzt (4.67) näherungsweise durch die Differenzenformel

$$\frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{\omega} + A^* A x(t_n) = A^* y_\delta, \quad x(t_0) = 0,$$

so erhält man durch Umstellen nach $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ die Vorschrift (4.60) der Landweber-Iteration. Die asymptotische Regularisierung ist also ein stetiges Analogon zur Landweber-Iteration.

4.1.4 Regularisierung durch endlichdimensionale Approximation

Wir haben bereits zwei Methoden der Behandlung von nach Nashed inkorrekten Operatorgleichungen (3.1) durch endlichdimensionale Approximation

kennengelernt. Zum einen beruhte die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung auf einer Einschränkung möglicher Lösungen auf den endlichdimensionalen Unterraum $X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$, wobei dieser Raum aus den Linearkombinationen der Eigenelemente u_j zu den n größten singulären Werten σ_j des Operators A gebildet wird. Die Zahl n ergibt sich dabei nach Vorgabe des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$ in eindeutiger Weise aus der Bedingung

$$\sigma_{n+1} < \alpha \leq \sigma_n. \quad (4.73)$$

Zum anderen haben wir uns im Abschnitt 3.1.6 mit der Methode der kleinsten Quadrate (3.35) beschäftigt. Dabei waren wir von injektiven und kompakten Operatoren A ausgegangen und haben ein Orthonormalsystem $\{w_j\}$ in X betrachtet und aus ihm einen n -dimensionalen Teilraum ausgewählt. Die Näherungslösungen $x_n^\delta = A_n^\dagger y_\delta$ der Lösung des Extremalproblems (3.35) genügen der Ungleichung

$$\|Ax_n^\delta - y_\delta\|_Y^2 \leq \|Ax - y_\delta\|_Y^2 \quad \text{für alle } x \in X_n. \quad (4.74)$$

Wegen der Orthogonalität des Defektelements $Ax_n^\delta - y_\delta$ zu allen Linearkombinationen der Gestalt $\sum_{i=1}^n \lambda_i Aw_i$ gelten außerdem die Gleichungen

$$\langle Ax_n^\delta, Ax \rangle_Y = \langle y_\delta, Ax \rangle_Y \quad \text{für alle } x \in X_n$$

bzw. dazu äquivalent

$$\langle Ax_n^\delta, Aw_j \rangle_Y = \langle y_\delta, Aw_j \rangle_Y \quad (j = 1, \dots, n). \quad (4.75)$$

Aufgrund der Injektivität von A ist (4.75) und das dazu äquivalente lineare Gleichungssystem

$$M\lambda = r \quad (4.76)$$

mit den Vektoren $x_n^\delta := \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ und $r_i := \langle y_\delta, Aw_i \rangle_Y$ sowie der Systemmatrix $M := (\langle Aw_i, Aw_j \rangle_Y)_{i,j=1,\dots,n}$ eindeutig lösbar. Nun steht die Frage, ob es sich bei dieser Modifikation $x_n^\delta := R_n y_\delta := A_n^\dagger y_\delta$ der Methode der kleinsten Quadrate um eine Regularisierung für den Operator A^\dagger handelt, der in unserem injektiven Fall dem Operator A^{-1} entspricht, die sich in das allgemeine Regularisierungsschema mit dem Parameter $\alpha = 1/n$ einordnen lässt.

Zunächst einmal spricht dafür die im Abschnitt 3.1.6 hergeleitete Abschätzung (3.36), die sich als Spezialfall von (4.6) im allgemeinen Schema erweist. Außerdem fällt unter unsere Voraussetzung der Kompaktheit von A für $\{w_j\} = \{u_j\}$ diese spezielle Kleinste-Quadrate-Methode mit der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung zusammen (siehe Aufgabe 4.5).

Dies ist aber für beliebig gewählte Systeme $\{w_j\}$ nicht der Fall, sondern nur, wenn das Operatorprodukt $A_n A^\dagger$ gleichmäßig beschränkt ist, also falls $\|A_n A^\dagger\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq K < \infty$ gilt. Eine solche gleichmäßige Beschränktheit ist nicht allgemeingültig, wie Seidman an einem Gegenbeispiel zeigte.

Jedoch kann man auch ohne explizite Kenntnis des singulären Systems des Operators A eine Regularisierung für A^\dagger durch endlichdimensionale Approximation erhalten. Wir gehen dazu von allgemeinen Galerkin-Verfahren aus, die auf die Bestimmung der Elemente $x_n^\delta \in X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$ mit

$$\langle Ax_n^\delta, \tilde{w}_j \rangle_Y = \langle y_\delta, \tilde{w}_j \rangle_Y \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.77)$$

gerichtet sind, wobei $\{w_j\}$ bzw. $\{\tilde{w}_j\}$ Systeme linear unabhängiger Elemente in den Räumen X bzw. Y darstellen. Mit $\tilde{w}_j = Aw_j$ ist die auf n -dimensionale Teilräume $X_n = \text{span}(w_1, \dots, w_n)$ eingeschränkte Methode der kleinsten Quadrate (4.75) ein spezielles Galerkin-Verfahren, welches allerdings nicht notwendigerweise regularisierende Eigenschaften besitzt. Wesentlich günstiger sieht es mit der *dualen Methode der kleinsten Quadrate* aus, bei der $w_j := A^* \tilde{w}_j$ für den Zusammenhang der beiden Elementensysteme verwendet wird. Als Charakterisierungen der dualen Methode findet man wieder ein lineares Gleichungssystem (4.76), wobei aber jetzt mit $x_n^\delta := R_n y_\delta := \sum_{i=1}^n \lambda_i A^* \tilde{w}_i$ die Darstellungen $r_i = \langle y_\delta, \tilde{w}_i \rangle_Y$ für den Vektor r und $M = (\langle A^* \tilde{w}_i, A^* \tilde{w}_j \rangle)_{i,j=1..n}$ für die reguläre Systemmatrix gelten. Wir erhalten das folgende Theorem (Beweis in Engl):

Theorem 24 Falls das Elementensystem $\{\tilde{w}_j\} \subset Y$ so gewählt wird, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $z \in \overline{R(A)}$ eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und reelle Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ existieren mit $\|z - \sum_{j=1}^m \lambda_j \tilde{w}_j\|_Y < \varepsilon$, so ist die über die duale Methode der kleinsten Quadrate definierte Operatorfamilie $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine lineare Regularisierung für den Operator A^\dagger , d.h., es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n y = A^\dagger y \quad \text{für alle } y \in R(A).$$

4.1.5 Probleme in $L^2(-\infty, \infty)$

In diesem Abschnitt wollen wir nun den Fall betrachten, dass die lineare Operatorgleichung (3.1) im Raumpaar $X = Y = L^2(-\infty, \infty)$ wirkt. Über uneigentliche Integrale wird die Norm

$$\|u\|_{L^2(-\infty, \infty)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (u(t))^2 dt} < \infty \quad (4.78)$$

und das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(-\infty, \infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt < \infty \quad (4.79)$$

definiert. Unter $L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)$ wollen wir dagegen den mit der Norm

$$\|u\|_{L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt} < \infty \quad (4.80)$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)} dt < \infty \quad (4.81)$$

ausgestatteten Raum der quadratisch integrierbaren komplexen Funktionen einer reellen Veränderlichen verstehen. Funktionen, die auf ganz \mathbb{R} definiert sind, spielen in technischen Modellen eine wichtige Rolle, z.B. bei elektrischen Signalen oder mechanischen Schwingungen. Die in keiner Richtung eingeschränkte Zeit erlaubt die Nutzung der Fouriertransformation

$$(\mathcal{F}u)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (-\infty < \omega < \infty), \quad (4.82)$$

um mit Hilfe dieser linearen Abbildung $u \mapsto \mathcal{F}u$ die Probleme aus dem Zeitbereich in den Frequenzbereich zu transformieren. Für derart transformierte Funktionen $\varphi(\omega) := (\mathcal{F}u)(\omega)$ stellt

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4.83)$$

die entsprechende Rücktransformation dar. Die Fouriertransformation kann man dabei als stetiges Analogon zur Entwicklung in eine Fourierreihe betrachten. Bezeichnet man mit $L^1(-\infty, \infty)$ den Banachraum der auf \mathbb{R} absolut integrierbaren reellen Funktionen $u(t)$ mit der Norm

$$\|u\|_{L^1(-\infty, \infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt < \infty, \quad (4.84)$$

so ist $\mathcal{F}u$ nach Formel (4.82) für alle $u \in L^1(-\infty, \infty)$ eine beschränkte und stetige komplexe Funktion der reellen Variablen ω mit $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} (\mathcal{F}u)(\omega) = 0$.

Dabei gelten für $u \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$ die Beziehungen $\mathcal{F}u \in L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)$ sowie

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)} = \|u\|_{L^2(-\infty, \infty)}.$$

Man kann außerdem den linearen Operator \mathcal{F} der Fouriertransformation auf Grundlage von Formel (4.82) auch auf komplexe Funktionen u anwenden und so auf den ganzen Raum $L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)$ erweitern (siehe Engl), dass $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty), L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty))$ einen sowohl injektiven als auch surjektiven Operator mit

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)} = \|u\|_{L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)} \quad \text{für alle } u \in L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty) \quad (4.85)$$

bildet, wodurch dann der stetige inverse Operator \mathcal{F}^{-1} ebenfalls auf ganz $L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)$ definiert ist. Die Fouriertransformierte einer quadratisch integrierbaren (verallgemeinerten) Ableitung u' einer Funktion $u \in L^2_{\mathcal{C}}(-\infty, \infty)$ genügt im übrigen der Formel

$$(\mathcal{F}u')(\omega) = i\omega(\mathcal{F}u)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.86)$$

Weiter gilt das folgende Lemma, welches in der Literatur als Faltungssatz bekannt ist. Dieses Lemma zeigt, dass die Faltung zweier reeller Funktionen durch Fouriertransformation in die Multiplikation komplexer Funktionen überführt wird.

Lemma 21 *Gegeben seien $u \in L^1(-\infty, \infty)$ und $v \in L^2(-\infty, \infty)$. Dann gelten für die Faltung*

$$w(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s-t)v(t) dt \quad (-\infty < s < \infty) \quad (4.87)$$

die Beziehungen $w \in L^2(-\infty, \infty)$ mit

$$\|w\|_{L^2(-\infty, \infty)} \leq \|u\|_{L^1(-\infty, \infty)} \|v\|_{L^2(-\infty, \infty)}$$

und

$$(\mathcal{F}w)(\omega) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}u)(\omega) \cdot (\mathcal{F}v)(\omega). \quad (4.88)$$

Faltungen traten im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsdichten bereits im Beispiel 2.6 auf.

Beispiel 4.1 Wir betrachten das Problem der Rekonstruktion eines tatsächlichen Signals $x(t)$ aus der Aufzeichnung desselben mit Hilfe eines Messgeräts. Gemessen wird dann die Funktion $y(t)$, die über eine lineare Faltungsgleichung

$$(Ax)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} k(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (-\infty < s < \infty) \quad (4.89)$$

mit dem Signal verbunden ist, wobei die Apparatfunktion $k(t)$ als bekannt vorausgesetzt wird. Das Ziel des inversen Problems ist das Entzerren des gemessenen Signals. Häufig ist die Apparatfunktion k symmetrisch bezüglich $t = 0$ und näherungsweise eine Glockenkurve

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\eta^2}\right) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Je kleiner $\eta > 0$ ausfällt, um so nadelförmiger ist die Glockenkurve und um so weniger verzerrt sind die Messdaten. Für $\eta \rightarrow 0$ strebt die Kernfunktion gegen die Deltadistribution. Mit wachsendem η wächst die Verzerrung und es fallen die Chancen, einer genauen Rekonstruktion des Signals x aus zusätzlich verrauschten Messdaten y_δ mit $\|y - y_\delta\|_{L^2(-\infty, \infty)} \leq \delta$. Sind die Apparatfunktion k und die Signalfunktion x nur auf der positiven Halbachse von Null verschieden und wird $y(s)$ nur für $s \in [0, T]$ gemessen, so nimmt (4.89) die Gestalt (3.50) einer speziellen Volterraschen Integralgleichung erster Art an, die wir im Beispiel 3.6 ausführlich behandelt haben.

Wir betrachten nun (4.89) mit $k \in L^1(-\infty, \infty)$ als lineare Operatorgleichung (3.1) in den Räumen $X = Y = L^2(-\infty, \infty)$, deren linearer Operator A wegen Lemma 21 beschränkt ist mit

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L^2(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty))} \leq \|k\|_{L^1(-\infty, \infty)}.$$

Es lässt sich zeigen, dass A hier kein kompakter Operator ist, obwohl auch kein abgeschlossener Wertebereich $R(A)$ in $L^2(-\infty, \infty)$ vorliegt. Wir haben es daher mit einem linearen inversen Problem zu tun, das nach Nashed inkorrekt vom Typ I ist. Die stabile näherungsweise Lösung von Gleichung (4.89)

erfordert also den Einsatz von Regularisierungsmethoden. Im Frequenzbereich erscheint die Gleichung (4.89) in der Gestalt

$$(\mathcal{F}k)(\omega) \cdot (\mathcal{F}x)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.90)$$

Setzt man voraus, dass die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}k)(\omega)$ der Kernfunktion Nullstellen nur für solche Zahlen ω besitzt, die eine Menge vom Lebesguemaß Null bilden, so hat diese Gleichung genau dann eine Lösung $(\mathcal{F}x)(\omega) \in L^2_C(-\infty, \infty)$, wenn die Bedingung

$$\frac{(\mathcal{F}y)(\omega)}{(\mathcal{F}k)(\omega)} \in L^2_C(-\infty, \infty) \quad (4.91)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist ein Analogon zu der für Operatorgleichungen (3.1) mit kompakten Operatoren gültigen Picardschen Bedingung (3.23). Die Bedingung (4.91) ist gewiss verletzt, wenn $(\mathcal{F}y)(\omega)$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ nicht schneller fällt als $(\mathcal{F}k)(\omega)$. Wegen der normerhaltenden Eigenschaft der Fouriertransformation bestimmt die Abklinggeschwindigkeit der Funktion $(\mathcal{F}k)(\omega) \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ in Analogie zur Abklingrate der Singulärwerte bei kompakten Operatoren den Grad der Inkorrektheit des linearen inversen Problems (4.89). Je schneller $(\mathcal{F}k)(\omega)$ abklingt, um so instabiler reagieren die Lösungen auf Störungen in den Daten. Bei Erfüllung von (4.91) lässt sich die Lösung der Gleichung (4.89) in der Form

$$x(t) = \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\mathcal{F}y)(\omega)}{(\mathcal{F}k)(\omega)} \right) \right) (t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (4.92)$$

schreiben. Kommen wir zur Regularisierung der linearen Operatorgleichung (4.89) im Raum $L^2(-\infty, \infty)$. Um die Methode der Tichonov-Regularisierung auf diese Gleichung anwenden zu können, nutzt man die Formeln (4.85) und (4.88). Das Tichonov-Funktional nimmt dann die Gestalt

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|(\mathcal{F}k) \cdot (\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y_\delta)\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2 + \alpha \|\mathcal{F}x\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2$$

an. Unter Verwendung des über die Vorschrift

$$(A_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u))(\omega) := (\mathcal{F}k) \cdot (\mathcal{F}u) \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (4.93)$$

definierten linearen Multiplikationsoperator $A_{\mathcal{F}}$ erhält man

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|A_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y_\delta)\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2 + \alpha \|\mathcal{F}x\|_{L^2_C(-\infty, \infty)}^2$$

und damit als regularisierte Lösung im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}x_\alpha^\delta = (A_{\mathcal{F}}^*A_{\mathcal{F}} + \alpha I)^{-1}A_{\mathcal{F}}^*\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y_\delta).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u), \mathcal{F}v \rangle_{L_C^2(-\infty, \infty)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}k)(\omega)(\mathcal{F}u)(\omega)\overline{(\mathcal{F}v)(\omega)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}u)(\omega)\overline{(\mathcal{F}k)(\omega)}(\mathcal{F}v)(\omega) d\omega \\ &= \langle \mathcal{F}u, A_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}v) \rangle_{L_C^2(-\infty, \infty)} \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} (A_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{F}v))(\omega) &= \overline{(\mathcal{F}k)(\omega)}(\mathcal{F}v)(\omega), \\ (A_{\mathcal{F}}^*A_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}u))(\omega) &= |(\mathcal{F}k)(\omega)|^2(\mathcal{F}u)(\omega) \end{aligned}$$

und damit

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{(\mathcal{F}k)(\omega)} \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{|(\mathcal{F}k)(\omega)|^2 + \alpha} \in L_C^2(-\infty, \infty), \quad (4.94)$$

woraus sich mit $x_\alpha^\delta = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)$ die eindeutig bestimmte und stabil von den Daten y_δ abhängige regularisierte Lösung von Gleichung (4.89) bestimmen lässt. Dabei muss aber bemerkt werden, dass diese Regularisierung in der Regel eine komplexe Funktion x_α^δ liefert. Als reellwertige Näherung der exakten Lösung x von (4.89) kann man jedoch z.B. den Realteil von x_α^δ verwenden. Konvergieren die regularisierten Lösungen x_α^δ für $\delta \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ gegen die exakte Lösung von Gleichung (4.89), so konvergieren auch die Realteile von x_α^δ gegen die reellwertige Lösungsfunktion x von (4.89).

Das Analogon zur H^1 -Regularisierung aus Gleichung (4.52) ergibt sich für unser Problem (4.89) durch Minimierung von

$$T_\alpha(\mathcal{F}x) = \|A_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}y_\delta)\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2 + \alpha\|\mathcal{F}x\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2 + \alpha\|\mathcal{F}x'\|_{L_C^2(-\infty, \infty)}^2.$$

Wegen Formel (4.86) erhalten wir daraus

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\overline{(\mathcal{F}k)(\omega)} \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{|(\mathcal{F}k)(\omega)|^2 + \alpha(1 + \omega^2)} \in L_C^2(-\infty, \infty). \quad (4.95)$$

Betrachtet man exakte rechte Seiten $y = Ax$, so werden in beiden Varianten (4.94) und (4.95) in $\mathcal{F}x_\alpha$ große Frequenzen $|\omega|$ im Vergleich zu $\mathcal{F}x$ stark gedämpft. Wir haben es hier wieder mit einer Tiefpassfilterung zu tun. Extreme Dämpfung durch Annulieren von Frequenzen oberhalb einer Grenzfrequenz liefert eine regularisierte Lösung x_α^δ , deren Fouriertransformierte in der Form

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{(\mathcal{F}k)(\omega)} & \text{für } |\omega| \leq \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \text{für } |\omega| > \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (4.96)$$

gebildet wird. Die Vorgehensweise (4.96) erfolgt in Anlehnung an die Methode der abgebrochenen Singulärwerte als Filterfunktion (4.58).

Wir haben schon verschiedene inverse Problem zur Wärmeleitgleichung betrachtet. Das folgende Beispiel ist als das Seitwärtsproblem zur Wärmeleitung bekannt.

Beispiel 4.2 Wir betrachten einen örtlich eindimensionale Wärmeleitvorgang, dass Temperaturen für alle nichtnegativen Werte der Ortsveränderlichen ρ sowie für beliebige reelle Werte der Zeitveränderlichen t erklärt sind. Die Wärmeleitgleichung lautet also

$$\frac{\partial u(\rho, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\rho, t)}{\partial \rho^2} \quad (0 \leq \rho < \infty, -\infty < t < \infty). \quad (4.97)$$

Dabei sollen die Temperaturen zu allen Zeiten und für $\rho \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. Das Seitwärtsproblem besteht nun aus der Identifikation des zeitlichen Temperaturprofils (Dirichletdaten) $x(t) = u(0, t)$ am linken Rand $\rho = 0$ des Ortsbereichs aus Temperaturbeobachtungen im Inneren. An einem fixierten Punkt $\rho = L > 0$ werden die Messwerte $y(t) = u(L, t)$ vorgenommen. Die Elemente x und y werden als Elemente des Raumes $X = Y = L^2(-\infty, \infty)$ betrachtet.

Bezeichnet $U(\rho, \omega) = (\mathcal{F}u)(\rho, \cdot)(\omega)$ die Fouriertransformation der Temperatur bezüglich der Zeit t bei fixiertem Ortspunkt ρ , so genügt diese Funktion der aus (4.97) hervorgehenden Differentialgleichung

$$i\omega U(\rho, \omega) = \frac{\partial^2 U(\rho, \omega)}{\partial \rho^2} \quad (0 \leq \rho < \infty, -\infty < \omega < \infty) \quad (4.98)$$

und bleibt für alle $\omega \in \mathbb{R}$ auch beim Übergang $\rho \rightarrow \infty$ beschränkt. daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$U(\rho, \omega) = \exp(-\theta(\omega)\rho)U(0, \omega) \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (4.99)$$

für die Lösungen $U(\rho, \omega)$ dieser Differentialgleichung, wobei

$$\theta(\omega) = (1 + \operatorname{sgn}(\omega)i)\sqrt{\frac{|\omega|}{2}} \quad (4.100)$$

gilt.

Im Frequenzbereich geschrieben erhält man als lineare Operatorgleichung des Seitwärtsproblems aufgrund der Beziehung (4.99)

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}x))(s) = \exp(-\theta(\omega)L) \cdot (\mathcal{F}x)(\omega) = (\mathcal{F}y)(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty). \quad (4.101)$$

Der Operator $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ ist im Raum $L^2_{\mathbb{C}}(-\infty, \infty)$ wieder ein (nicht kompakter) Multiplikationsoperator, der wegen $\exp(-\theta(\omega)L) \neq 0$ injektiv ist, aber mit $\exp(-\theta(\omega)L) \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ eine unbeschränkte Inverse $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^{-1}$ besitzt. Somit ist Gleichung (4.101) inkorrekt. Wegen der normerhaltenden Eigenschaft der Fouriertransformation kann das Seitwärtsproblem selbst als Operatorgleichung (3.1) mit einem injektiven und nicht kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(-\infty, \infty), L^2(-\infty, \infty))$ geschrieben werden und ist daher inkorrekt nach Nashed vom Typ I. Da der Grad der Inkorrektheit solcher Probleme mit Multiplikationsoperatoren im Prinzip durch die Abklinggeschwindigkeit der Multiplikatorfunktion bestimmt wird, haben wir es beim Seitwärtsproblem wegen des exponentiellen Abklingens von $\exp(-\theta(\omega)L)$ mit einem stark inkorrekten Problem zu tun, dessen Inkorrektheit mit wachsendem L offenbar noch zunimmt.

In vollständiger Anlehnung an den soeben behandelten Fall der Faltungsgleichung im Raum $L^2(-\infty, \infty)$ können wir nun die Tichonov-Regularisierung für das Seitwärtsproblem über die Beziehung

$$\mathcal{F}x_{\alpha}^{\delta} = (\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^* \mathcal{M}_{\mathcal{F}} + \alpha I)^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{F}}^* (\mathcal{F}y_{\delta})$$

realisieren. Wegen

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^* (\mathcal{F}v))(\omega) = \exp(-\overline{\theta(\omega)}L)(\mathcal{F}v)(\omega)$$

und

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}^* \mathcal{M}_{\mathcal{F}} (\mathcal{F}u))(\omega) = \exp(-(\overline{\theta(\omega)} + \theta(\omega))L)(\mathcal{F}u)(\omega) = \exp(-\sqrt{2\omega}L)(\mathcal{F}u)(\omega)$$

erhalten wir als Fouriertransformierte

$$(\mathcal{F}x_\alpha^\delta)(\omega) = \frac{\exp(\theta(\omega)L) \cdot (\mathcal{F}y_\delta)(\omega)}{1 + \alpha \exp(\sqrt{2|\omega|}L)} \in L_C^2(-\infty, \infty). \quad (4.102)$$

Die Anwendung der inversen Fouriertransformation \mathcal{F}^{-1} auf (4.102) liefert eine stabil von den Eingangsdaten y_δ abhängige regularisierte Lösung x_α^δ des Seitwärtsproblems zur Wärmeleitgleichung. Diese ist in der Regel wieder eine komplexwertige Funktion. Die Beträge der Funktionswerte von x_α^δ können jedoch als sinnvolle Näherung für die gesuchte Temperatur benutzt werden.

4.1.6 Regularisierung bei der Interpretation periodischer Daten

Auch Aufgaben zur Analyse von Zeitreihen sind von der Natur her inverse Probleme. In diesem Abschnitt soll es um die Interpretation periodischer Daten gehen. Unter Interpretation periodischer Daten versteht man die Erkennung signifikanter Schwingungsanteile und die Bestimmung charakteristischer Frequenzen. Damit verbindet man die Hoffnung, Aussagen (Prognosen) für die Zukunft machen zu können. Periodische Daten treten in vielfältiger Weise in Technik und Wirtschaft auf. Neben der Signalverarbeitung findet man sie auch in Wirtschaft, Finanzwesen und Börse.

Als Zeitreihen betrachten wir reelle Funktionen, deren Werte zu diskreten Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots$ beobachtet wurden. Diese Werte werden im Beobachtungsvektor y zusammengefasst. Diesen Vektor betrachtet man näherungsweise als Realisierung eines stochastischen Prozesses. Das heißt die Werte von y schwanken für alle betrachteten Zeitpunkte um einen festen Mittelwert, wobei das Verhalten der Werte $y(t_1)$ und $y(t_2)$ zu unterschiedlichen Zeitpunkten nur vom Zeitabstand abhängig sein soll.

Zur Interpretation der Zeitreihe gehen wir von einem Integralgleichungsmodell

$$\int_0^\pi \cos(\lambda t) f(\lambda) d\lambda + \int_0^\pi \sin(\lambda t) g(\lambda) d\lambda + \varepsilon(t) = y(t) \quad (t \geq 0) \quad (4.103)$$

aus, welches die Funktion $y(t)$ in Kosinus- und Sinusschwingungen zur variablen Eigenfrequenz λ und eine als weißes Rauschen betrachtete zufällige

Störung ε zerlegt. Würde es gelingen, die zugehörigen Amplitudenfunktionen f und g mit hinreichender Genauigkeit aus der Zeitreihe $y(1), \dots, y(m)$ zu bestimmen, so könnte man die Gleichung (4.103) in der Form

$$\hat{y} = \int_0^\pi \cos(\lambda t) f(\lambda) d\lambda + \int_0^\pi \sin(\lambda t) g(\lambda) d\lambda \quad (t \geq 0) \quad (4.104)$$

als Grundlage für eine Schätzung \hat{y} zur Vorhersage von $y(t)$ zu späteren Zeitpunkten $t > m$ verwenden.

Man erhält einen Einblick in die Schwierigkeiten des Problems, wenn man $\varepsilon(t)$ vernachlässigt, und dabei annimmt, dass für $T = m$ die Funktion $y(t)$ für alle Argumente t mit $0 \leq t \leq T$ verfügbar sei. Als Aufgabe ergibt sich dann die simultane Bestimmung des Funktionenpaares $(f, g) \in L^2(0, \pi) \times L^2(0, \pi)$ bei gegebener Funktion $y \in Y = L^2(0, T)$. Dieses lineare Identifikationsproblem kann man als Fredholmsche Integralgleichung erster Art

$$\int_0^{2\pi} k(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4.105)$$

schreiben, in welcher die unbekannte Funktion $x \in X = L^2(0, \pi)$ mit

$$x(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq \pi \\ g(\tau - \pi) & \text{für } \pi \leq \tau \leq 2\pi \end{cases} \quad (4.106)$$

zu bestimmen ist. Für die Kernfunktion der Integralgleichung gilt dabei die Beziehung

$$k(t, \tau) = \begin{cases} \cos(t\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq \pi \\ \sin(t(\tau - \pi)) & \text{für } \pi \leq \tau \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4.107)$$

Man erkennt leicht, dass die Gleichung (4.105) und damit die betrachtete inverse Aufgabe stark inkorrekt ist, denn mit

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} (k(t, \tau))^2 d\tau dt = \int_0^T \int_0^{2\pi} ((\cos(t\tau))^2 + (\sin(t\tau))^2) d\tau dt = \pi T < \infty$$

ist die Kernfunktion $k(t, \tau)$ quadratisch integrierbar. Der zu (4.105) gehörige lineare Integraloperator wird dann in den betrachteten L^2 -Räumen zum Hilbert-Schmidt-Operator. Da die Kernfunktion in (4.107) für alle betrachteten τ unendlich oft bezüglich t differenzierbar ist, gilt wegen Theorem 15 und Folgerung 8 die Beziehung $\nu = \infty$ für den Grad der Inkorrektheit des Problems.

Ein Weg zur stabilen Lösung von (4.105) könnte in der Anwendung der Methode der Tichonov-Regularisierung liegen, bei welcher je nach Wahl des Lösungsraumes eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art (4.49) oder eine Integrodifferentialgleichung (4.52) als Ersatzaufgabe anstelle von (4.105) eingesetzt würde. Ebenso ließen sich Näherungslösungen durch Iterationsverfahren gewinnen, wobei die Anzahl der durchzuführenden Schritte z.B. auf der Grundlage des Diskrepanzprinzips gesteuert werden könnte. Für die effiziente Einbeziehung der vorliegenden periodischen Datenstruktur scheinen diese Methoden jedoch nicht besonders geeignet zu sein, da weder eine durch das Problem angeregte Wahl des Sympathiefunktional $\Omega(x)$, noch eine Vorgabe des Datenfehlniveaus δ zur Realisierung des Diskrepanzprinzips auf der Hand liegen. Dagegen bietet die Statistik unter Nutzung des Begriffs des Periodogramms einen zum Problem passenden Weg der Regularisierung durch Konzentration auf dominante Frequenzen in der Zeitreihe.

Wir vereinfachen dazu das Modell (4.103) zu

$$\sum_{j=1}^k (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)) + \varepsilon(t) = y(t) \quad (t = 1, 2, \dots, m), \quad (4.108)$$

wobei zu einer möglichst klein gewählten natürlichen Zahl k geeignete Frequenzen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0, \pi]$ aus der Zeitreihe y bestimmt werden sollen. Kennt man Multiplikatoren a_j und b_j , die mit den Zeitreihendaten im Sinne von (4.108) eine gute Übereinstimmung signalisieren, so ist eine Vorhersage über die Vorschrift

$$\hat{y}(t) = \sum_{j=1}^k (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)) \quad (t > m) \quad (4.109)$$

sinnvoll. Die dominanten Frequenzen λ_j ($j = 1, \dots, k$) gewinnt man dabei anhand der k größten relativen Maxima der Periodogrammfunktion

$$Per(\lambda) = \frac{1}{2\pi m} \left| \sum_{j=1}^m (y_j - \mu) \exp(-i\lambda k) \right|^2, \quad (4.110)$$

wobei $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} y_j / m$ den Mittelwert der Zeitreihe verkörpert. Die Anpassung der im Parametervektor x zusammengefassten $2k$ Parameter a_j und b_j erfolgt

am besten auf der Grundlage einer gewichteten Kleinste-Quadrate-Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = y$$

durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\|W(Ax - y)\|_2^2 = \min! \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.111)$$

Dabei sei

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1) & \dots & \cos(\lambda_k) & \sin(\lambda_1) & \dots & \sin(\lambda_k) \\ \cos(2\lambda_1) & \dots & \cos(2\lambda_k) & \sin(2\lambda_1) & \dots & \sin(2\lambda_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(m\lambda_1) & \dots & \cos(m\lambda_k) & \sin(m\lambda_1) & \dots & \sin(m\lambda_k) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

die Systemmatrix und $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine geeignet zu wählende Gewichtsmatrix. Für einen Datenabgleich (4.111) spielt die Gewichtsmatrix W , die meist in der Form einer Diagonalmatrix gewählt wird, eine wichtige Rolle. Damit lassen sich unterschiedliche subjektive Bewertungen verschiedener Etappen der Zeitreihe y in den Vorhersageprozess einbringen. Besonders vorteilhaft scheint die Vergabe eines Gegenwartsbonus für spätere Glieder der Zeitreihe zu sein, wie er sich zum Beispiel bei $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_m)$ in der Formel

$$w_j = \left(\frac{1}{m+1-j} \right)^p \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.112)$$

mit einer Potenz $p > 0$ niederschlägt. Je größer p gewählt wird, um so mehr "vergisst" man bei der Datenanpassung weiter zurückliegende Zeiträume.

Der hier dargestellte statistisch motivierte Zugang über die Betrachtung der ausgeprägtesten Peaks des Periodogramms interpretiert man in den Ingenieurwissenschaften meist als Bestimmung wesentlicher Frequenzen eines aufgezeichneten Schwingungsvorgangs mittels Fouriertransformation. Die regularisierende Wirkung dieses Verfahrens besteht allerdings gerade darin, dass die inkorrekte Integralgleichung (4.105) eben nicht im endlichdimensionalen Raum möglichst gut nachgebildet wird, sondern in der Wahl einer kleinen Zahl k von verwendeten Frequenzen λ_j ($j = 1, \dots, k$). Bei dieser Aufgabenklasse übernimmt diese Zahl k die Rolle des Regularisierungsparameters. Die Funktion $y(t)$ wird auf diese Weise geglättet, d.h., wie bei der

Tichonov-Regularisierung werden auch hier vielfältige hochfrequente Anteile der Lösung unterdrückt. Meist sind die signifikanten Peaks des Periodogramms nämlich nicht im Bereich hoher Frequenzen zu finden. Für die Vorhersage bedeutet das, dass man ausgehend von der beobachteten Zeitreihe das weitere prinzipielle periodische Verhalten in der Zukunft vorherzusagen versucht, aber die aus dem Periodogramm als bedeutungslos erkannten Schwingungsanteile dabei gänzlich außer acht lässt.

Beispiel 4.3 In diesem Beispiel beschäftigen wir uns mit einer Fallstudie aus dem Gebiet der Ökonometrie. Im Mittelpunkt der Betrachtung steht eine Zeitreihe, welche die Entwicklung des durchschnittlichen Kapitalzinssatzes widerspiegelt. Im einzelnen betrachten wir die Zeitreihe der Monatsdaten der Umlaufrendite festverzinslicher Wertpapiere in der Bundesrepublik Deutschland ab August 1955 bis 1995, wie sie in den Berichten der Deutschen Bundesbank regelmäßig veröffentlicht wird.

Aus dem Graphen dieser Zeitreihe erkennt man einen gewissen periodischen Charakter dieser Daten. Deutlich erkennbar ist auch der stochastische Charakter der Zeitreihe. Der Mittelwert der Umlaufrendite im betrachteten Zeitraum liegt bei 7,5 Prozent pro Jahr. In dieser Studie gehen wir von März 1992 als Beobachtungszeitpunkt aus und wollen mit den bis dahin vorliegenden $m = 440$ Monatsdaten das Schwingungsverhalten der Zeitreihe analysieren und darauf aufbauend verschiedene Varianten einer Vorhersage bis Dezember 1995 diskutieren. Im rechten Teil vom Bild findet man das Periodogramm der bis März 92 betrachteten Zeitreihe.

Wir wählen für den Optimierungsprozess (4.111) mit $k = 4$ in der Variante (V1) neben $\lambda_1 = 0$ zur Berücksichtigung des konstanten Anteils der Zeitreihe die drei Peaks des Periodogramms bei $\lambda_2 = 0.0157$, $\lambda_3 = 0.0597$ und $\lambda_4 = 0.1005$, welche eine Schwingungslänge von 33.3 Jahren, 8.77 Jahren und 5.21 Jahren entsprechen ($2\pi/(12 \cdot \lambda)$).

Da die Zeitreihe nur unbedeutend länger ist als die erste betrachtete Periode von 33.3 Jahren, kann es sich bei λ_2 um einen auswertungsbedingten Artefakt handeln. Um dessen Einfluss zu überprüfen, wird in einer Variante (V2) anstatt des ersten Peaks des Periodogramms als $\lambda_2 = 0.1555$ der vierte Peak mit einer Periodenlänge von 3.37 Jahren einbezogen. Diese regularisierten Varianten (V1) und (V2) mit sehr kleinem k ermöglichen einen Vergleich mit einer nahezu unregularisierten Variante (V3), bei der $k = 11$ Frequenzen aus dem Bereich $\lambda \in [0, \pi]$ berücksichtigt werden.

Im Bild findet man die regularisierte Zinskurve nach Variante (V1) mit einem Exponenten $p = 1$ in den Gewichten (4.112) im Vergleich zur tatsächlichen Zeitreihe. Die Unterdrückung hochfrequenter Anteile der Zeitreihe wird dabei offensichtlich. Dem hinteren Zeitabschnitt zwischen März 1992 und dem Jahresbeginn 1996 entnimmt man das Verhalten der Vorhersagekurve, die in den ersten Monaten noch recht gut mit der Realität übereinstimmt.

Extreme Oszillationen im nächsten Bild machen deutlich, dass ein starker Gegenwartsbonus (hier $p = 2$ als Exponent in den Gewichten) zwar eine sehr gute Anpassung an die jüngsten Daten ermöglicht, insgesamt aber kein brauchbares Ergebnis liefert. Wir haben es dabei mit der falschen Wahl eines wichtigen numerischen Parameters bei der Regularisierung zu tun. Für die Tiochonov-Regularisierung treten ähnliche Oszillationen bei zu kleinem Regularisierungsparameter α und damit zu großer Konditionszahl der Systemmatrix des entsprechenden linearen Gleichungssystems auf.

Die Wirkung der Anpassung der Zeitreihe an eine Vielzahl von Schwingungskomponenten mit den unterschiedlichsten Frequenzen zeigt das nächste Bild. Hier wurde Variante (V3) und $p = 1$ verwendet. Die enthaltenen hochfrequenten Anteile verhindern eine glatte Vorhersage. Diese (praktisch) unregularisierte Variante liefert als Vorhersage kaum Besseres als die konstante Fortschreibung der Zeitreihe in die Zukunft.

Die Vorhersageergebnisse aller drei Varianten mit $p = 1$ im Vergleich mit der realen Entwicklung sind im letzten Bild dargestellt. Im betrachteten Vorhersagefenster spiegeln die Ergebnisse der Varianten (V1) und (V2) die tatsächliche Entwicklung in groben Zügen wider. Dagegen weist die Variante (V3) keinen Bezug zur Realität auf.

Es sei erwähnt, dass es in den Jahren 1996 bis 1998 vielleicht unter dem Einfluss der Globalisierung der Märkte bzw. der Vorbereitung der Einführung des Euros zu einem Modellbruch gekommen ist. Dieser wird durch ein durchgehend niedriges Zinsniveau charakterisiert, welches tendenziell immer neue Nachkriegstiefs ansteuerte (unter 4 Prozent). Weiterführende Rechnungen in diesen Bereich machen daher wenig Sinn. Analysen und Vorhersagen in mathematischen Modellen sind eben nur dann tragfähig, wenn in dem betrachteten Zeit- oder Ortsbereich das zugrunde gelegte mathematische Modell noch gültig ist.

4.2 Regularisierung schlechtkonditionierter linearer Gleichungssysteme

Es gibt zwei Wege, die man gehen kann, um mit Hilfe eines Computers stabile näherungsweise Lösungen inkorrekt linearer inverser Probleme zu erhalten. Der erste Weg beruht auf der Maxime *erst regularisieren, dann diskretisieren* und schließt unmittelbar an die im Abschnitt 4.1 vorgestellten Diskretisierungsmethoden an, die auf regularisierte Lösungen im unendlich-dimensionalen Hilbertraum führen. Da Computer keine Funktionen, sondern nur endlich viele Zahlen verarbeiten können, müssen die dabei zu lösenden korrekten linearen Ersatzaufgaben der inkorrekten Operatorgleichung (3.1) diskretisiert werden, d.h., diese Aufgaben werden durch lineare Gleichungssysteme approximiert. Eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten der Diskretisierung am Beispiel der korrekten linearen Integralgleichungen zweiter Art (siehe Formel (4.49)) findet man bei Engl (S.69 ff).

Falls genügend große Regularisierungsparameter α verwendet werden, sind die so entstehenden Gleichungssysteme gutkonditioniert und können daher mit Standardsoftware der linearen Algebra stabil und ohne Schwierigkeiten gelöst werden. Aus dem Ergebnis dieser diskretisierten Systeme kann man dann eine Näherungslösung von (3.1) rekonstruieren.

Der zweite Weg, mit dessen Besonderheiten wir uns im vorliegenden Abschnitt befassen wollen, nutzt die umgekehrte Vorgehensweise entsprechend dem Prinzip *erst diskretisieren, dann regularisieren*. Die lineare Operatorgleichung (3.1) wird im ersten Schritt diskretisiert und durch ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = y, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (4.113)$$

angenähert, welches uns bereits im Beispiel 3.1 begegnet ist, wobei in der Regel $m \geq n$ vorausgesetzt wird. Wir betrachten diese Räume mit der Euklidischen Norm und dem entsprechenden Skalarprodukt. Bei genügend guter Diskretisierung schlägt sich die Instabilität der Ausgangsaufgabe (3.1) im endlichdimensionalen Problem (4.113) in Form von hohen Konditionszahlen nieder. Die numerische Behandlung von (4.113) erfordert daher im zweiten Schritt eine Regularisierung. Regularisierung bedeutet hier die Ersetzung eines schlechkonditionierten Problems durch ein gutkonditioniertes

Nachbarproblem. Wir wollen nun die Anwendung einiger spezieller Regularisierungsmethoden auf die diskretisierte Aufgabe (4.113) betrachten. Dabei gehen wir von fehlerhaften Daten

$$z = y + \varepsilon \quad (4.114)$$

mit $y \in R(A)$ und der vektoriellen Datenstörung ε aus. Für diese Datenstörung werden wir im weiteren deterministische und stochastische Apriori-Informationen benutzen. Scheut man den beträchtlichen Aufwand zur Berechnung der Singulärwertzerlegung nicht, so empfiehlt sich zur Regularisierung von (4.113) die Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung mit dem Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ (siehe Formel (4.57)). Als regularisierte Lösung, welche die Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger z$ approximieren soll, erhält man dabei

$$x_\alpha = R_\alpha z + A^\dagger z = \sum_{\sigma_j > \alpha} \frac{\langle z, v_j \rangle}{\sigma_j} u_j. \quad (4.115)$$

Die Regularisierungsmatrix

$$R_\alpha = A_\alpha^\dagger = U \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_l}, 0, \dots, 0\right) V^T \quad (\sigma_{l+1} < \alpha \leq \sigma_l)$$

mit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} A_\alpha^\dagger z = A^\dagger z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^m$$

und

$$\|A_\alpha^\dagger\|_2 \leq \frac{1}{\alpha}$$

ist für genügend großes α eine gutartige Modifikation der Pseudoinversen A^\dagger , denn Störungen in der rechten Seite multiplizieren sich dann bei der Berechnung von x_α höchstens mit dem Faktor $1/\alpha$.

Auch für schlechkonditionierte lineare Gleichungssysteme stellt die Methode der Tichonov-Regularisierung das am häufigsten angewandte Stabilisierungsverfahren dar. In vielen Fällen wird sie für Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ als Optimierungsproblem

$$T_\alpha(x) = \|Ax - z\|_2^2 + \alpha \|Lx\|_2^2 = \min!, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.116)$$

mit einer die Sympathiefunktion $\Omega(x) = \|Lx\|_2^2 = \langle L^T Lx, x \rangle_2$ erzeugenden Matrix $L \in \mathbb{R}^{k \times n}$ formuliert. Da wir die zu minimierende Tichonov-Funktion $T_\alpha(x)$ auch in der Form

$$T_\alpha(x) = \langle (A^T A + \alpha L^T L)x, x \rangle_2 - 2\langle x, A^T z \rangle_2 + \|z\|_2^2$$

schreiben können, ist für eine reguläre Matrix $A^T A + \alpha L^T L$ mit

$$\langle (A^T A + \alpha L^T L)x, x \rangle_2 \geq \beta \|x\|_2^2 \quad (\beta > 0)$$

Lemma 20 anwendbar und liefert als eindeutig bestimmte Lösung

$$x_\alpha = R_\alpha z = (A^T A + \alpha L^T L)^{-1} A^T z \quad (4.117)$$

unter Verwendung der Regularisierungsmatrix $R_\alpha = (A^T A + \alpha L^T L)^{-1} A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit dem Stabilitätsfaktor $\|R_\alpha\|_2 \leq \frac{\|A\|_2}{\beta}$. Für die Berechnung des Vektors x_α ist dabei nur das lineare Gleichungssystem

$$(A^T A + \alpha L^T L)x_\alpha = A^T z \quad (4.118)$$

mit einer positiv definiten symmetrischen Systemmatrix zu lösen, welches wenigstens für reguläre Matrizen $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und genügend große $\alpha > 0$ gutkonditioniert ist. Dieser Vektor x_α kann auch als Lösung des kleinste Quadrateproblems

$$T_\alpha(x) = \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha} L \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \min!, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit der erweiterten Matrix $\begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\alpha} L \end{pmatrix}$ aufgefasst werden.

Im Falle der Einheitsmatrix $L = I$ lässt sich in Analogie zur Formel (4.22) der nach Tichonov regularisierte Lösungsvektor in einfacher Weise als endliche Reihe

$$x_\alpha = \sum_{j=1}^r \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle z, v_j \rangle_2 u_j \quad (4.119)$$

darstellen, wobei die natürliche Zahl $r = \text{rang}(A)$ wieder den Rang der rechteckigen Matrix A ausdrückt. Für die Regularisierungsmatrix $R_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T$ haben wir dann die Konvergenzbeziehung

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha z = A^\dagger z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^m.$$

Von großer praktischer Bedeutung sind jedoch auch andere Matrizen L z.B. solche die bei der Diskretisierung des Sympathiefunktional (2.45) in der Form

$$\Omega(x) = \|Lx\|_2^2 = \mu_1 \|L_1x\|_2^2 + \mu_2 \|L_2x\|_2^2 + \mu_3 \|L_3x\|_2^2$$

mit entsprechenden nichtnegativen Multiplikatoren μ_1, μ_2, μ_3 und den Matrizen $L_1 = I$,

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times n}$$

entstehen. Um in derartigen Fällen mit Reihendarstellungen für x_α arbeiten zu können, muss man verallgemeinerte Singulärwertzerlegungen des Matrizenpaars (A, L) verwenden (siehe Hansen).

Das schwierigste Problem bei der praktischen Nutzung der Tichonov-Regularisierung (4.116) zur stabilen näherungsweise Lösung eines diskretisierten inversen Problems (4.113) auf der Grundlage des gegebenen Datenvektors z ist die Wahl des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$. Da man meist nur einen Datenvektor zur Verfügung hat, tritt die Frage der Konvergenz der regularisierten Lösungen in den Hintergrund. Dafür besteht großes Interesse an heuristischen Parameterwahlkriterien, die in einer Vielzahl von praktischen Situationen ihre Leistungsfähigkeit bewiesen haben. Wir bringen hier eine kurze Übersicht über die wichtigsten Prinzipien.

Ist als Apriori-Information eine deterministische Fehlerschranke $\delta > 0$ mit $\|\varepsilon\|_2 \leq \delta$ ableitbar, so kann das Morozovsche Diskrepanzprinzip

$$\alpha_{dis} : \|Ax_{\alpha_{dis}} - z\|_2 = \delta \quad (4.120)$$

bei der Parameterwahl eingesetzt werden, welches aber zur Überregularisierung neigt (Wahl zu großer α -Werte). Realistische Schranken δ sollten

dabei neben den Beobachtungsfehler auch Diskretisierungsfehler beim Übergang von der Operatorgleichung (3.1) zum linearen Gleichungssystem (4.113) berücksichtigen. Manchmal lohnt es sich, eine verallgemeinerte Version des Diskrepanzprinzips, etwa im Sinne von

$$\alpha_{dis} : \quad \|Ax_{\alpha_{dis}} - z\|_2 = \delta_1 + \delta_2 \|Lx_{\alpha_{dis}}\|_2 \quad (4.121)$$

mit geeigneten positiven Konstanten δ_1, δ_2 zu verwenden.

Häufig modelliert man den Fehlervektor ε stochastisch als weißes Rauschen mit der komponentenweisen Streuung $\sigma^2 > 0$. Das Diskrepanzprinzip erhält dann die Gestalt

$$\alpha_{dis} : \quad \|Ax_{\alpha_{dis}} - z\|_2 = \rho m \sigma^2 \quad (4.122)$$

mit dem Erwartungswert $E\|\varepsilon\|_2^2 = m\sigma^2$ des Datenfehlers und einer Konstanten $\rho > 0$, die meist unterhalb von Eins gewählt wird. Für die Bestimmung des Regularisierungsparameters α_{dis} auf der Grundlage der Formeln (4.120), (4.121) oder (4.122) nutzt man wie im unendlichdimensionalen Fall (siehe Formel (4.29)) die Tatsache, dass $\|Ax_\alpha - z\|_2$ eine monoton nichtwachsende Funktion des positiven Regularisierungsparameters α darstellen.

Die folgenden drei Kriterien beruhen auf der Minimierung bzw. der Maximierung positiver Funktionen des Regularisierungsparameters $\alpha > 0$. Je klarer ausgeprägte absolute Extrema diese Funktionen besitzen, um so zuverlässiger lassen sich diese Kriterien handhaben. Das in 4.1.2 erwähnte Prinzip der Quasioptimalität liefert mit dem Ableitungskriterium

$$\alpha_{op} : \quad \left\| \alpha \frac{dx_\alpha}{d\alpha} \right\|_2 = \min!, \quad \alpha > 0 \quad (4.123)$$

eine vielfach bewährte Technik zur Wahl von α . Dieses Kriterium wird ebenso wie das Quotientenkriterium

$$\alpha_{qu} : \quad \frac{\|A(\alpha \frac{dx_\alpha}{d\alpha}) - (Ax_\alpha - z)\|_2}{\|Ax_\alpha - z\|_2} = \max!, \quad \alpha > 0 \quad (4.124)$$

in dem Buch von Tichonov/Arsenin erwähnt. Insbesondere wenn die Folge der Singulärwerte der Matrix A größere Lücken aufweist, können die in (4.123) und (4.124) zu optimierenden Zielfunktionen allerdings zahlreiche relative Extrema besitzen, was eine Auswahl von α nach diesen Kriterien erschwert. Keine Schwierigkeiten bereitet dagegen die Berechnung des für die

Auswertung der Zielfunktion erforderlichen Ableitungsvektor $\frac{dx_\alpha}{d\alpha}$, der sich für jedes $\alpha > 0$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(A^T A + \alpha L^T L) \frac{dx_\alpha}{d\alpha} = -L^T L x_\alpha$$

bestimmen lässt. Die dabei auftretende Systemmatrix ist die gleiche wie bei der Berechnung der regularisierten Lösung x_α selbst.

Aus stochastischer Sicht sehr beliebt ist das von Wahba entwickelte verallgemeinerte Cross-Validation-Kriterium

$$\alpha_{vcv} : \frac{\|Ax_\alpha - z\|_2}{(\text{spur}(I - A(A^T A + \alpha L^T L)^{-1} A^T))^2} = \min!, \quad \alpha > 0 \quad (4.125)$$

Zur dabei auftretenden Spur sei auf das etwas später folgende Lemma verwiesen. Leider ist die in (4.125) auftretende Funktion häufig sehr flach, so dass α_{vcv} nicht zuverlässig bestimmt werden kann. Besonders ungünstig wirken sich dabei nicht stochastisch modellierte Diskretisierungsfehler aus, die in den Datenvektor z eingehen und im ungünstigsten Falle die Benutzung des Kriteriums gänzlich unmöglich machen.

Zum Abschluss wollen wir noch das L-Kurven-Kriterium von Hansen erwähnen, welches sowohl bei der Tichonov-Regularisierung wie auch bei der abgebrochenen Singulärwertentwicklung in den letzten Jahren große Popularität erlangt hat. Obwohl sich hier wie bei allen Kriterien, die keine explizite Obergrenze für den Datenfehler benutzen, keine Konvergenzaussage für $\|\varepsilon\|_2 \rightarrow 0$ finden lässt, erhält man in vielen praktischen Situationen akzeptable Regularisierungsparameter. Wir beschreiben das Kriterium für die Tichonv-Regularisierung (4.117). Die Grundlage bildet ein in logarithmischen Skalen aufgezeichneter 2D-Plot der durch den Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ parametrisierten Kurve mit den Koordinatenpaaren $(\|Ax_\alpha - z\|_2, \|Lx_\alpha\|_2)$. Der Defekt $Ax_\alpha - z$ wird dabei von zwei entscheidenden Größen beeinflusst, vom Datenfehler ε und von dem durch die Regularisierungsmatrix erzeugten Approximationsfehler $(AR_\alpha - I)y$ bei fehlerhafter rechter Seite y . Wenn α mit Werten nahe Null beginnend wächst, so ändert sich die Defektnorm $\|Ax_\alpha - z\|_2$ erst einmal kaum, denn der von α unabhängige Datenfehler dominiert diese Größe. Dahingegen fällt die Norm von $\|Lx_\alpha\|_2$ in diesem Bereich bei wachsendem α relativ schnell. Erreicht der Regularisierungsparameter aber eine solche Größe, dass die Dämpfungsfaktoren zu wirken beginnen, so

schlägt das Verhalten der Fehlereinflüsse schroff um, und der Approximationsfehler dominiert plötzlich den Datenfehler. Die Defektnorm wächst dann mit α schnell an, wogegen sich $\|Lx_\alpha\|_2$ kaum noch ändert. Das Resultat ist in vielen Fällen eine L -Kurve.

Die ‘‘Ecke‘‘ dieser Kurve, also der Kurvenbereich mit maximaler Krümmung deutet auf geeignete Regularisierungsparameter α_{Lcu} hin. aber wie alle anderen kann dieses Kriterium versagen, die Kurve im 2D-Plot nichts mit einem L zu tun haben. Bei der Wahl des Regularisierungsparameters sollten daher stets mehrere Kriterien kombiniert werden, um sinnvolle Größenbereiche für α herauszufiltern.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts wollen wir uns nun mit der näherungsweise Bestimmung von Lösungsvektoren $x \in \mathbb{R}^n$ der diskretisierten inversen Aufgabe (4.113) aus stochastischer Sicht als Schätzproblem in einem linearen Regressionsmodell

$$Ax + \varepsilon = z, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon, z \in \mathbb{R}^m \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \text{rang}(A) = n \quad (4.126)$$

beschäftigen. Dabei ist ε ein zufälliger Vektor, der die ersten beiden Momente

$$E\varepsilon = 0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad \text{Cov}\varepsilon = C \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (4.127)$$

mit einer positiv definiten Kovarianzmatrix C besitzen möge. Für die Inverse der Kovarianzmatrix setzen wir dabei eine Zerlegung der Gestalt $C^{-1} = W^T W$ ($W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, regulär) an. Im Gegensatz zu Regressionsmodellen (4.126) in der Statistik, deren Spalten nahezu orthogonal sind, müssen wir als Besonderheit unserer Situation hervorheben, dass A eine schlechtkonditionierte Matrix ist, deren Spalten nahezu linear abhängig sind.

Wir betrachten die affin lineare Transformation

$$\hat{x}(z) = Vz + v, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad v \in \mathbb{R}^n \quad (4.128)$$

des Datenvektors z und fassen $\hat{x} = \hat{x}(z)$ als affin lineare Schätzung des gesuchten Vektors x auf. Dabei gelten verschiedene Zusammenhänge, die hier als zwei Lemmata formuliert werden.

Lemma 22 *Die für eine quadratische Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ als Summe der Hauptdiagonalelemente definierte Spur erfüllt die Beziehungen*

$$\text{spur}(M) = \text{spur}(M^T), \quad (4.129)$$

$$\text{spur}(RA) = \text{spur}(AR), \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n}, R \in \mathbb{R}^{n \times m}) \quad (4.130)$$

und

$$\text{spur}(A^T A) = \sum_{j=1}^r \sigma_j^2, \quad (4.131)$$

wobei σ_j wieder die Folge der positiven Singulärwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = r$ bezeichnet. Weiterhin gilt für eine positiv definite Matrix $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und eine Matrix $V \in \mathbb{R}^{l \times k}$ stets $\text{spur}(VMV^T) \geq 0$ und die Implikation

$$\text{spur}(VMV^T) = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad (\text{Nullmatrix in } \mathbb{R}^{l \times k}). \quad (4.132)$$

Lemma 23 *Es seien ξ und ζ zwei k -dimensionale Vektoren und η ein l -dimensionaler Vektor mit $E\eta = 0$. Weiterhin seien $v \in \mathbb{R}^k$ ein fester Vektor und $V \in \mathbb{R}^{l \times k}$ eine feste Matrix. Dann gelten die Beziehungen*

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta, \quad (4.133)$$

$$E\langle v, \xi \rangle = \langle v, E\xi \rangle, \quad (4.134)$$

$$E(V\xi) = V(E\xi) \quad \text{und} \quad \text{Cov}(V\xi) = V \text{Cov}\xi V^T \quad (4.135)$$

sowie

$$E\|\eta\|_2^2 = \text{spur}(\text{Cov}\eta). \quad (4.136)$$

Für den Schätzfehler der affin linearen Schätzung (4.128) gilt nun

$$\hat{x}(z) - x = VAx + V\varepsilon + v - x = (VA - I)x + v + V\varepsilon.$$

und beim Übergang zum mittleren quadratischen Fehler

$$E\|\hat{x}(z) - x\|_2^2 = E(\|(VA - I)x + v\|_2^2 + \|V\varepsilon\|_2^2 + 2\langle (V^T(VA - I)x + V^T v, \varepsilon) \rangle_2).$$

Dabei wird der Erwartungswert über alle mögliche zufällige Vektoren ε gebildet. Aufgrund der Beziehungen (4.127) und (4.133)–(4.136) erhält man daraus schließlich

$$E\|\hat{x}(z) - x\|_2^2 = \|(VA - I)x + v\|_2^2 + \text{spur}(VCV^T). \quad (4.137)$$

Wir betrachten zuerst nur erwartungstreue affin lineare Schätzungen mit $E\hat{x}(z) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wegen

$$E\hat{x}(z) = VAx + v + EV\varepsilon = VAx + v$$

setzt dies $VA = I$ und $v = 0$ voraus. Unter diesen Schätzungen wollen wir den mittleren quadratischen Fehler minimieren.. Mit $\text{rang}(A) = n$ und regulärer Kovarianzmatrix C ist

$$\hat{x}_{blue} = V_{blue}z = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} z \quad (4.138)$$

unter allen solchen Schätzungen die beste (blue: best linear unbiased estimate) mit kleinstem Fehlererwartungswert

$$E\|\hat{x}_{blue} - x\|_2^2 = \text{spur}((A^T C^{-1} A)^{-1}).$$

Für $C^{-1} = W^T W$ können wir die Schätzung \hat{x}_{blue} als Lösung des gewichteten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|W(A\tilde{x} - z)\|_2^2 = \min! \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

finden, das schon im Abschnitt 4.1.6 (Formel (4.111)) diskutiert wurde. Leider sind diese unregularisierten Kleinste-Quadrate-Lösungen und damit die Schätzungen \hat{x}_{blue} für schlechtkonditionierte Matrizen A sehr instabil. Sie liefern eine große Spur der Matrix $(A^T C^{-1} A)^{-1}$ und damit einen großen mittleren Schätzfehler.

Die Überwindung dieser Instabilität durch Regularisierung bedeutet hier, dass man die erwartungstreuen Schätzungen verlässt und eine Verzerrung (bias) erlaubt. Als gutartige Näherung von \hat{x}_{blue} verwendet man vorzugsweise Ridge-Schätzungen

$$\hat{x}_M = V_M z = (A^T C^{-1} A + M)^{-1} A^T C^{-1} z, \quad (4.139)$$

die auf symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ basieren. Es ist offensichtlich, dass sich die regularisierte Lösung x_α (Formel (4.117)) der Tichonov-Regularisierung für $C = \sigma^2 I$ und $M = \frac{\alpha}{\sigma^2} L^T L$ als spezielle Ridge-Schätzung erweist.

Ridge-Schätzungen mit $M = B^{-1}$ spielen auch eine wichtige Rolle in Bayeschen linearen Regressionsmodellen (4.126), in denen die Lösung selbst als Realisierung eines zufälligen Vektors x mit den Momenten

$$Ex = \mu \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \text{Cov } x = B \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.140)$$

betrachtet wird. Dabei nehmen wir an, dass die zufälligen Vektoren ε und x stochastisch unabhängig sind und gehen von einer positiv definiten Kovarianzmatrix B des zufälligen Vektors der potentiellen Lösungen x aus. Als Bayessches Risiko bezeichnet man den mittleren quadratischen Fehler $E\|\hat{x}(z) - x\|_2^2$, in welchem der Erwartungswert über alle zufälligen Vektoren ε und x genommen wird. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von ε und x kann man für affin lineare Schätzungen (4.128) das Bayessche Risiko als Erwartungswert über alle Vektoren x angewandt auf Formel (4.137) bilden und erhält

$$\begin{aligned} E\|\hat{x}(z) - x\|_2^2 &= E\|(VA - I)(x - \mu) + (VA - I)\mu + v\|_2^2 + \text{spur}(VCV^T)^{-1} \\ &= E\|(VA - I)(x - \mu)\|_2^2 + 2E\langle (VA - I)(x - \mu), (VA - I)\mu + v \rangle_2 \\ &\quad + E\|(VA - I)\mu + v\|_2^2 + \text{spur}(VCV^T)^{-1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für das Bayessche Risiko wegen $E(x - \mu) = 0$ die Gleichung

$$E\|\hat{x}(z) - x\|_2^2 = \text{spur}((VA - I)B(VA - I)^T + VCV^T) + \|(VA - I)\mu + v\|_2^2. \quad (4.141)$$

Um das Bayessche Risiko zu minimieren, wählt man $v = (I - VA)\mu$ und löst das Optimierungsproblem

$$\text{spur}((VA - I)B(VA - I)^T + VCV^T) = \min! \quad V \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (4.142)$$

d.h., es ist eine solche Matrix $V = V_{st}$ zu finden, welche die Spur der Matrix $(VA - I)B(VA - I)^T + VCV^T$ am kleinsten werden lässt. Dann ist $x_{st} = \mu + V_{st}(z - A\mu)$ die optimale Bayessche Schätzung, die wir hier als stochastische Regularisierung bezeichnen wollen.

Theorem 25 *Die stochastische Regularisierung*

$$\tilde{x}_{st} = \mu + V_{st}(z - A\mu) = \mu + (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T C^{-1} (z - A\mu) \quad (4.143)$$

mit der Matrix

$$V_{st} = (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T C^{-1}$$

ist die eindeutig bestimmte affin lineare Schätzung (4.128) mit kleinstem Bayesschen Risiko

$$E\|\hat{x}_{st}(z) - x\|_2^2 = \text{spur}((A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1}). \quad (4.144)$$

Von der Gültigkeit dieses Satzes wollen wir uns jetzt überzeugen. Wir machen dazu den Ansatz $V = V_{st} + V_{rest}$ mit $V_{st} = (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T C^{-1}$ und zeigen, dass genau für $V_{rest} = 0$ die Spur der Matrix

$$(VA - I)B(VA - I)^T + VCV^T$$

minimal wird. Es ist

$$\begin{aligned} \text{spur}((VA - I)B(VA - I)^T + VCV^T) &= \text{spur}((V_{st}A - I)B(V_{st}A - I)^T \\ &+ \text{spur}(V_{st}CV_{st}^T + V_{rest}(ABA^T + C)V_{rest}^T), \end{aligned}$$

denn es gilt wegen (4.129)

$$\begin{aligned} \text{spur}(V_{rest}AB(V_{st}A - I)^T + (V_{st}A - I)BA^T V_{rest}^T) &+ \\ \text{spur}(V_{st}CV_{rest} + V_{rest}CV_{st}) &= 2\text{spur}((V_{st}A - I)BA^T + V_{st}C)V_{rest}^T \\ &= 0, \end{aligned}$$

da die Matrix

$$\begin{aligned} (V_{st}A - I)BA^T + V_{st}C &= ((A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T C^{-1} A - I)BA^T \\ &+ (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T \\ &= -(A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T \\ &+ (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} A^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

verschwindet. Nun ist mit $V_{st}A - I = -(A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} B^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{spur}((V_{st}A - I)B(V_{st}A - I)^T + V_{st}CV_{st}^T) &= \\ \text{spur}((A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} B^{-1} B (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} B^{-1}) &+ \\ \text{spur}((A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} B^{-1} A^T C^{-1} A (A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1} B^{-1}) &= \\ \text{spur}((A^T C^{-1} A + B^{-1})^{-1}). \end{aligned}$$

Die betrachtete Gesamtspur wird am kleinsten, wenn V_{rest} den Wert

$$\text{spur}(V_{rest}(ABA^T + C)V_{rest}^T)$$

minimiert. Da $(ABA^T + C)$ jedoch eine positiv definite Matrix darstellt, ist dies wegen Lemma 22 Formel (4.132) genau dann der Fall, wenn $V_{rest} = 0$ gilt. Folglich gilt Theorem 25.

Man überzeugt sich leicht, dass \hat{x} auch das Optimierungsproblem

$$\langle C^{-1}(A\tilde{x} - z), A\tilde{x} - z \rangle_2 + \langle B^{-1}(\tilde{x} - \mu), \tilde{x} - \mu \rangle_2 = \min! \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.145)$$

löst. Mit $C^{-1} = W^T W$ und der Sympathiefunktion

$$\Omega(\tilde{x}) = \langle B^{-1}(\tilde{x} - \mu), \tilde{x} - \mu \rangle_2 = (\tilde{x} - \mu)^T B^{-1}(\tilde{x} - \mu)$$

kann die stochastische Regularisierung als Lösung des regularisierten gewichteten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|W(A\tilde{x} - z)\|_2^2 + \Omega(x) = \min! \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$$

geschrieben werden. Es ist dabei bemerkenswert, dass sich beim Bayesschen Modell die optimale Gewichtsmatrix W und die optimale Sympathiefunktion Ω aus Momenten der zufälligen Vektoren x und ε automatisch ergeben. Somit besteht bei der stochastischen Regularisierung keine Notwendigkeit der Wahl von Regularisierungsparametern. Allerdings müssen der Vektor μ sowie die Matrizen B und C in der Praxis meist empirisch aus Stichprobendaten geschätzt werden.

4.3 Tichonov-Regularisierung für nichtlineare Gleichungen

Wir betrachten hier das nichtlineare Identifikationsproblem

$$F(x) = y, \quad x \in D \subset X, \quad y \in Y \quad (4.146)$$

in den unendlich dimensionalen Hilberträumen X und Y . Unser Ziel besteht in der Übertragung der Methode der Tichonov-Regularisierung auf den Fall nichtlinearer inkorrektur Operatorgleichungen. Wir gehen dabei von einem konvexen Definitionsbereich D und einem stetigen und schwachabgeschlossenen Operator F aus, der für alle $x \in D$ eine Fréchet-Ableitung $F'(x)$ besitzen möge. Zur exakten rechten Seite $y \in Y$ existiere wenigstens ein Lösungselement $x_0 \in D$ mit $F(x_0) = y$. Wir suchen nun nach einer Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = x_{mn}(y) \in D$ der Operatorgleichung (4.146) zu einem gegebenen Referenzelement $x^* \in X$ mit $F(x_{mn}) = y$ und

$$\|x_{mn} - x^*\|_X = \min\{\|x - x^*\|_X : F(x) = y, x \in D\}. \quad (4.147)$$

Die nach Tichonov regularisierten Lösungen x_α^δ werden dabei ausgehend von gestörten Daten $y_\delta \in Y$ mit

$$\|y_\delta - y\|_Y \leq \delta \quad (4.148)$$

als Lösung des regularisierten Kleinste-Quadrate-Problems

$$T_\alpha(x) = \|F(x) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha \|x - x^*\|_X^2 = \min!, \quad x \in D \quad (4.149)$$

mit einem positiven Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ konstruiert. Für praktische Rechnungen diskretisiert man das Ersatzproblem (4.149) und löst die entsprechende nichtlineare Optimierungsaufgabe im endlichdimensionalen Raum. Der alternative Weg (erst diskretisieren, dann regularisieren) ist ebenfalls möglich. Wir diskutieren diese Möglichkeit kurz am Beispiel der Selbstfaltungsgleichung

$$(F(x))(s) = \int_0^s x(s-t)x(t) dt = y(s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (4.150)$$

im Hilbertraum $X = Y = L^2(0, 1)$. Dazu unterteilen wir das Einheitsintervall in n Teilintervalle $I_j = [s_{j-1}, s_j]$ mit $s_j = j/n$ und den Mittelpunkten $t_i = (i - 1/2)/n$. Die Integrale lassen sich dann unter Verwendung von Funktionswerten in den Mittelpunkten der Teilintervalle durch die Summen

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^j x(s_j - t_i)x(t_i)$$

annähern. Da aber im Raum L^2 Funktionswerte nicht punktweise definiert sind, substituiert man $y(s_j)$ wie auch $x(t_i)$ durch gewichtete Durchschnitte

$$y_j = \int_{I_j} w_1(t)y(t) dt \quad \text{und} \quad x_i = \int_{I_i} w_2(t)x(t) dt$$

auf der Grundlage geeigneter nichtnegativer Gewichtsfunktionen w_1 und w_2 mit

$$\int_{I_j} w_1(t) dt = \int_{I_i} w_2(t) dt = 1.$$

Für die j -te Komponente erhalten wir dann die Gleichung

$$y_j = \Phi_j(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j x_{j+1-i}x_i. \quad (4.151)$$

Die inkorrekte nichtlineare Integralgleichung (4.150) wird dann durch das schlechtkonditionierte Gleichungssystem

$$\Phi(x) = y, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (4.152)$$

angenähert, wobei

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$$

als Definitionsbereich betrachtet wird. Die auf der Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems

$$T_\alpha(x) = \|\Phi(x) - y_\delta\|_2^2 + \alpha \|x - x^*\|_2^2 = \min!, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (4.153)$$

beruhende Tichonov-Regularisierung liefert dann für einen Referenzvektor x^* und hinreichend großem α wieder stabile Näherungslösungen x_α^δ von (4.152).

Bei numerischen Experimenten zu dieser Gleichung kommt man zu folgenden Resultaten. Die fehlerbehafteten Daten wurden durch zufällige relative Fehler ≤ 0.01 generiert. Die unregularisierte Lösung weist wieder Oszillationen auf. Die Amplituden dieser Oszillationen werden für wachsende t immer größer. Wählt man dagegen den Regularisierungsparameter nach einen der heuristischen Parameterwahlkriterien, z.B. $\alpha = 10^{-4}$, so stimmen regularisierte Lösung und exakte Lösung sehr gut überein. Meist ist dabei das Verhalten der regularisierten Lösung an den Intervallenden schlechter als im mittleren Abschnitt des Definitionsintervalls.

Wir wollen uns nun wieder mit der Tichonov-Regularisierung im unendlichdimensionalen Hilbertraum beschäftigen. Im Gegensatz zum unregularisierten Kleinste-Quadrate-Problem ist das regularisierte Gegenstück (4.149) für positive α stets lösbar.

Lemma 24 *Unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator F besitzt das regularisierte Kleinste-Quadrate-Problem (4.149) für alle $y_\delta \in Y$ wenigstens ein Lösungselement $x_\alpha^\delta \in D$.*

Ist nämlich $\{x_n\} \subset D$ eine Folge von Elementen mit $T_\alpha(x_n) \leq \inf_{x \in D} T_\alpha(x) + \eta_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$, dann sind $\{\|F(x_n) - y_\delta\|_Y^2\}$ und $\{\|x_n - x^*\|_X^2\}$ beschränkte Folgen. Es gibt dann eine schwach konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightharpoonup \bar{x} \in D$ mit

$F(x_{n_k}) \rightharpoonup \bar{y}$. Wegen der schwachen Abgeschlossenheit von F gilt $\bar{y} = F(\bar{x})$ und damit (wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der Normen)

$$\|\bar{x} - x^*\|_X \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x^*\|_X$$

sowie

$$\|F(\bar{x}) - y_\delta\|_Y \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F(x_{n_k}) - y_\delta\|_X.$$

Wegen $T_\alpha(\bar{x}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} T_\alpha(x_{n_k}) = \inf_{x \in D} T_\alpha(x)$ ist dann $\bar{x} = x_\alpha^\delta$ eine Lösung des Extremalproblems (4.149).

Mit den gleichen Hilfsmitteln zeigt man die Stabilität der regularisierten Lösung x_α^δ bezüglich kleiner Störungen in den Daten. Wenn $y_{\delta_n} \rightarrow y_{\delta_0}$ in Y gilt, so gibt es in der Folge regularisierter Lösungen $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ eine in X konvergente Teilfolge, und das Grenzelement jeder solchen konvergenten Teilfolge ist eine regularisierte Lösung $x_{\alpha_0}^{\delta_0}$.

Im nächsten Theorem behandeln wir die Konvergenz regularisierter Lösungen $x_{\alpha(\delta)}^\delta$ gegen x^* -Minimum-Norm-Lösungen x_{mn} bei geeigneter Apriori-Parameterwahl $\alpha = \alpha(\delta)$.

Theorem 26 *Wir wählen die Regularisierungsparameter $\alpha = \alpha(\delta)$ derart, dass*

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \delta \rightarrow 0 \quad (4.154)$$

gelten. Dann hat unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator F für $\delta_n \rightarrow 0$ jede Folge $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ von Lösungen der Extremalprobleme (4.149) mit $\delta := \delta_n$, $\|y_{\delta_n} - y\| \leq \delta_n$ und $\alpha := \alpha_n = \alpha_n(\delta_n)$ eine in X konvergente Teilfolge, deren Grenzelement eine x^ -Minimum-Norm-Lösung x_{mn} der Operatorgleichung (4.146) repräsentiert.*

Für den Beweis des Theorems 26 betrachten wir eine x^* -Minimum-Norm-Lösung x_{mn} der Operatorgleichung (4.146). Dann gilt für die Elemente der Folge $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ regularisierter Lösungen die Ungleichung

$$\begin{aligned} T_{\alpha_n}(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) &= \|F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) - y_{\delta_n}\|_Y^2 + \alpha_n \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^*\|_X^2 \\ &\leq T_{\alpha_n}(x_{mn}) \\ &= \|F(x_{mn}) - y_{\delta_n}\|_Y^2 + \alpha_n \|x_{mn} - x^*\|_X^2 \\ &\leq \delta_n^2 + \alpha_n \|x_{mn} - x^*\|_X^2 \end{aligned}$$

aus welcher $F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) \rightarrow y$ und damit natürlich auch $F(x_{\alpha_n}^{\delta_n}) \rightharpoonup y$ in Y für $n \rightarrow \infty$ folgt. Ebenso ergibt sich daraus wegen (4.154)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x_{\alpha_n}^{\delta_n} - x^*\|_X \leq \|x_{mn} - x^*\|_X.$$

Da nun $\{x_{\alpha_n}^{\delta_n}\}$ beschränkt ist, haben wir eine schwach konvergente Teilfolge $x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} \rightharpoonup \bar{x} \in D$ für $k \rightarrow \infty$. Die schwache Abgeschlossenheit von F liefert dann $F(\bar{x}) = y$. Wegen $x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} - x^* \rightharpoonup \bar{x} - x^*$ ist

$$\|\bar{x} - x^*\|_X \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \|x_{\alpha_{n_k}}^{\delta_{n_k}} - x^*\|_X \leq \|x_{mn} - x^*\|_X$$

und somit selbst x^* -Minimum-Norm-Lösung der Operatorgleichung (4.146). Damit ist Theorem 26 bewiesen.

Abschließend wollen wir noch die Frage beantworten, ob auch bei nichtlinearen Problemen Konvergenzraten für die Tichonov-Regularisierung erreichbar sind. Wir erinnern uns hier speziell an die Theoreme 22 und 23 für den nichtlinearen Fall. Hier wollen wir aber nur den Fall $\alpha \sim \delta$ näher betrachten. Wie im linearen Fall kommen Konvergenzraten für die Lösung nicht ohne Quelldarstellung der Lösung aus. Im Hintergrund steht wohl dabei auch die Tatsache, dass man lokale Korrektheit erzwingen kann, wenn man den Definitionsbereich einer lokal inkorrekten Aufgabe entsprechend einschränkt (siehe Theorem 17).

Theorem 27 *Es sei x_{mn} eine x^* -Minimum-Norm-Lösung der nichtlinearen Operatorgleichung (4.146) mit*

$$\|F'(x) - F'(x_{mn})\|_Y \leq L\|x - x_{mn}\|_X \quad \text{für alle } x \in D. \quad (4.155)$$

Dann gilt unter den in diesem Abschnitt formulierten Forderungen an den Operator F für eine Apriori-Wahl $\alpha = \alpha(\delta) \sim \delta$ die Fehlerabschätzung

$$\|x_{\alpha}^{\delta} - x_{mn}\|_X \leq C\sqrt{\delta} \quad (4.156)$$

für eine Konstante $C > 0$, falls x_{mn} eine Quelldarstellung der Gestalt

$$x_{mn} - x^* = F'(x_{mn})^* w \quad (w \in Y) \quad (4.157)$$

mit

$$L\|w\|_Y < 1 \quad (4.158)$$

befriedigt.

Die Aussage von Theorem 27 beruht wieder auf der Ungleichung

$$T_\alpha(x_\alpha^\delta) = \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\|x_\alpha^\delta - x^*\|_X^2 \leq T_\alpha(x_{mn}) \leq \delta^2 + \alpha\|x_{mn} - x^*\|_X^2,$$

welche

$$\begin{aligned} \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 &\leq \delta^2 + \alpha\|x_{mn} - x^*\|_X^2 \\ &\quad + \alpha(\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 - \|x_\alpha^\delta - x^*\|_X^2) \\ &= \delta^2 + \alpha\langle x_{mn} - x^*, x_{mn} - x^* \rangle_X \\ &\quad + \alpha\langle x^* - x_{mn}, 2x_\alpha^\delta - x_{mn} - x^* \rangle_X \\ &= \delta^2 + 2\alpha\langle x_{mn} - x^*, x_{mn} - x_\alpha^\delta \rangle_X \end{aligned}$$

nach sich zieht. Wegen Formel (4.155) erhält man

$$\|F(x_\alpha^\delta) - F(x_{mn}) - F'(x_{mn})(x_\alpha^\delta - x_{mn})\|_Y \leq \frac{L}{2}\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2$$

und damit unter Berücksichtigung der Quelldarstellung (4.157)

$$\begin{aligned} \|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y^2 + \alpha\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 &\leq \delta^2 + 2\alpha\langle w, F'(x_{mn})(x_{mn} - x_\alpha^\delta) \rangle_Y \\ &\leq \delta^2 + 2\alpha\langle w, (y - y_\delta) + (y_\delta - F(x_\alpha^\delta)) \rangle_Y \\ &\quad + 2\alpha\langle w, F(x_\alpha^\delta) - F(x_{mn}) - F'(x_{mn})(x_\alpha^\delta - x_{mn}) \rangle_Y \\ &\leq \delta^2 + 2\alpha\delta\|w\|_Y + 2\alpha\|w\|_Y\|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y \\ &\quad + \alpha L\|w\|_Y\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2. \end{aligned}$$

Das wiederum liefert die Ungleichung

$$(\|F(x_\alpha^\delta) - y_\delta\|_Y - \alpha\|w\|_Y)^2 + \alpha(1 - L\|w\|_Y)\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X^2 \leq (\delta + \alpha\|w\|_Y)^2$$

und schließlich wegen (4.158)

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \frac{\delta + \alpha\|w\|_Y}{\sqrt{\alpha}\sqrt{1 - L\|w\|_Y}}.$$

Daraus erhält man unter Verwendung von $\alpha \sim \delta$ bzw. $\underline{C}\delta \leq \alpha \leq \overline{C}\delta$ für alle betrachteten $\delta > 0$

$$\|x_\alpha^\delta - x_{mn}\|_X \leq \frac{\delta + \overline{C}\|w\|_Y\delta}{\sqrt{\delta}\sqrt{\underline{C}}\sqrt{1 - L\|w\|_Y}} \leq C\sqrt{\delta}.$$

Dies entspricht der Fehlerabschätzung (4.156). Dabei ist ausreichend, bei Formulierung und beim Beweis von Theorem 27 nur genügend kleine $\delta > 0$ zu betrachten. Auch für die Lipschitz-Bedingung (4.155) reicht es, wenn sie in einer genügend großen Umgebung von x_{mn} gilt. Aus den obigen Überlegungen wird außerdem deutlich, dass es nur eine x^* -Minimum-Norm-Lösung x_{mn} der Operatorgleichung (4.146) geben kann, welche die Voraussetzungen von Theorem 27 erfüllt.

Weitere Detailuntersuchungen zur Tichonov-Regularisierung nichtlinearer inkorrektur Operatorgleichungen, Aussagen zur Aposteriorwahl und Anwendungsbeispiele findet man bei Engl/Hanke/Neubauer (Kapitel 10). Im Kapitel 11 von diesem Buch findet man die wichtigsten heute bekannten Ergebnisse zur iterativen Behandlung solcher nichtlinearer Probleme. Insbesondere enthält dieser Abschnitt Aussagen über die Landweber-Iteration für nichtlineare Probleme.

Übungsaufgabe 4.1 Zeigen Sie, dass für regularisierte Lösungen x_α^δ (siehe Formel 4.22) bei der Tichonov-Regularisierung einer unrestringierten linearen Operatorgleichung $Ax = y$ mit kompaktem Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\dim(R(A)) = \infty$ in separablen Hilberträumen X und Y mit $\psi(\alpha) = \|x_\alpha^\delta\|_X^2$ die Grenzwertbeziehungen

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \psi(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } y_\delta \in Y$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = \|A^\dagger y_\delta\|_X^2 \text{ für } y_\delta \in R(A) \oplus R(A)^\perp$$

sowie

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = \infty \text{ für } y_\delta \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$$

gelten.

Übungsaufgabe 4.2 Unter den Voraussetzungen $N(A^*) = \{0\}$ und (4.32) sei x_{opt} eine Lösung des restringierten Ersatzproblems (4.34). Man weise nach, dass es dann einen Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ gibt, so dass x_{opt} auch eine nach Tichonov regularisierte Lösung x_α^δ mit $T_\alpha(x_{opt}) \leq T_\alpha(x)$ für alle $x \in X$ ist.

Übungsaufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass für $y_\delta \notin N(A^*)$ die in Formel (4.37) im Zusammenhang mit der Tichonov-Regularisierung einer linearen Operatorgleichung $Ax = y$ bei kompaktem Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\dim(R(A)) =$

∞ in separablen Hilberträumen X und Y eingeführte Funktion $\hat{\varphi}(\beta) = \|Ax_{1/\beta}^\delta - y_\delta\|_Y^2 - \delta^2$ für alle $\beta > 0$ stets monoton fallend und streng konvex ist.

Übungsaufgabe 4.4 Man zeige die Gültigkeit der Ungleichung (4.71) aus Abschnitt 4.1.3 für alle positiven reellen Zahlen α und σ .

Übungsaufgabe 4.5 Man überzeuge sich von der Tatsache, dass die n -dimensionalen Teilräume $X_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$ eingeschränkte Methode der kleinsten Quadrate (4.74) für einen kompakten Operator A mit dem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}$ auf die Formel

$$x_n^\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\langle y_\delta, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

führt, die damit unter der Bedingung (4.73) mit der Darstellungsformel (4.57) der Methode der abgebrochenen Singulärwertentwicklung übereinstimmt.