Kapitel 3

Identifikationsprobleme im Hilbertraum

In diesem Kapitel betrachten wir Identifikationsprobleme, die sich als Operatorgleichungen in reellen Hilbertrräumen schreiben lassen. Wir bezeichnen dabei die auftretenden Skalarprodukte mit $\langle .,. \rangle_X$ und $\langle .,. \rangle_Y$. Die Normen in diesen Räumen sollen durch die Skalarprodukte erzeugt werden, d.h.

$$\langle .,. \rangle_X = \|x\|_X^2 \text{ und } \langle .,. \rangle_Y = \|y\|_Y^2.$$

Wir werden uns dabei auf separable Hilberträume beschränken. Dort stehen uns endliche oder abzählbare Orthonormalsysteme zur Verfügung, die eine explizite Darstellung bestimmter Sachverhalte ermöglichen. Besonders prägnante Aussagen gewinnt man dabei wieder bei unrestringierten linearen Identifkationsprobleme in Form von linearen Operatorgleichungen. Dabei soll der Operator der direkten Aufgabe wieder kompakt sein.

3.1 Lineare Operatorgleichungen im Hilbertraum

Wir haben im letzten Kapitel bereits die Korrektheit von linearen unrestringierten Identifkationsproblemen in Banachräumen im Sinne von Hadamard diskutiert. Wir betrachten nun die Gleichung

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad A \in \mathcal{L}(X,Y) \tag{3.1}$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass X und Y Hilberträume sind.

3.1.1 Grundbegriffe der Hilbertraumtheorie

Es sei H ein reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und deraus erzeugten Norm $\|.\|$. Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

für alle Elemente x und y des Hilbertraums. Zwei Elemente heißen orthogonal, falls die Bedingung $\langle x,y\rangle = 0$ erfüllt ist. Für orthogonale Elemente gilt der Satz des Pythagoras

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Wir bezeichnen mit

$$T^\perp := \{x \in H : \langle x,z\rangle = 0 \; \forall z \in T\}$$

das orthogonale Komplement einer Teilmenge T von H. Das orthogonale Komplement eines Teilraums H_1 von H ist ein abgeschlossener Teilraum von H. Ist H_1 ein abgeschlossener Teilraum, so kann H als orthogonale direkte Summe

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp$$

dargestellt werden, d.h. für jedes Element $x \in H$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $x_1 \in H_1$ und $x_2 \in H_1^\perp$ mit $x = x_1 + x_2$.

Eine Folge $\{e_n\} \subset H$ heißt Orthonormalsystem, wenn die Orthonormaltätsrelationen

$$\langle e_m, e_n\rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \qquad (m,n = 1,2,..)$$

gelten. Das Orthonormalitätssystem heißt vollständig, wenn sich jedes Element $x \in H$ in eine konvergente Fourierreihe

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$$

entwickeln lässt, wobei für alle $x \in H$ die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 = \|x\|^2$$

erfüllt ist. Die Skalarprodukte $\langle x, e_n \rangle$ heißen Fourierkoeffizienten von x. Ist $\{e_n\} \subset H$ ein nicht notwendig vollständiges Orthonormalsystem, so gilt wenigstens die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

In separablen Hilberträumen gibt es immer vollständige endliche oder abzählbare Orthonormalsysteme.

Besonders einfach ist die Beschreibung des dualen Raumes, d.h. der Menge der linearen und beschränkten Funktionale. Der Satz von Riesz besagt, dass sich jedes solche Funktional in der Form

$$f(x) = \langle x, g \rangle \qquad \text{für alle } x \in H$$

mit einem eindeutig bestimmten Repräsentantenelement $g \in h$ darstellen lässt. Unter den Konstanten $C > 0$, für die die Ungleichung

$$|f(x)| \leq C\|x\| \qquad \text{für alle } x \in H$$

gilt, ist $C = \|g\|$ der kleinstmögliche Wert.

Neben der starken Konvergenz spielt in Hilberträumen auch die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ einer Folge $\{x_n\} \subset H$ gegen ein Grenzelement $x_0 \in H$ eine wesentliche Rolle. Eine Folge $\{x_n\} \subset H$ konvergiert für $n \to \infty$ schwach gegen x_0, wenn für alle $g \in H$ die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, g \rangle = \langle x_0, g \rangle$$

erfüllt ist. Bei schwacher Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ gilt stets $\|x_0\| \leq \lim \inf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Das Grenzelement einer schwach konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Die starke Konvergenz $x_n \to x_0$ zieht immer die schwache $x_n \rightharpoonup x_0$ nach sich. Andererseits liefern schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup x_0$ und Konvergenz der Normen $\|x_n\| \to \|x_0\|$ zusammen die starke Konvergenz $x_n \to x_0$ in H.

Jede in H beschränkte Menge ist relativ schwach kompakt, d.h. aus jeder unendlichen Folge $\{x_n\} \subset H$ kann man eine schwach konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightharpoonup x_0$ auswählen. Insbesondere konvergiert eine Folge $\{e_n\} \subset H$, die ein Orthonormalsystem bildet immer schwach gegen die Null, d.h.

$$e_n \rightharpoonup 0$$

für $n \to \infty$. Aus der Besselschen Ungleichung folgt nämlich

$$\lim_{n \to \infty} \langle x, e_n \rangle = 0.$$

Für die schwache Kompaktheit benötigt man zusätzlich noch die schwache Abgeschlossenheit. Auf diese kann man schliessen, falls eine Menge abgeschlossen und konvex ist.

3.1.2 Eigenschaften beschränkter Operatoren im Hilbertraum

Wir betrachten nun lineare beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ in separablen Hilberträumen. Ein solcher Operator ist automatisch auch schwach stetig, d.h. es gilt

$$x_n \rightharpoonup x_0 \;\Rightarrow\; Ax_n \rightharpoonup Ax_0.$$

Achtung: Diese Aussage ist falsch für nichtlineare Operatoren. Die schwache Stetigkeit ist eine stärkere Eigenschaft als die "normale" Stetigkeit. Über die Beziehung

$$\langle Au, v \rangle_Y = \langle u, A^* v \rangle_X$$

für alle $u \in X$ und $v \in Y$ lässt sich in eindeutiger Weise der zu A adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ definieren. Zwischen den Nullräumen $N(A)$ und $N(A^*)$ und den Bildräumen $R(A)$ und $R(A^*)$ von A und A^* bestehen die Beziehungen

$$X = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} \quad \text{und} \quad Y = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}.$$

Falls $A \in \mathcal{L}(X, X)$ und $A = A^*$ gilt, so heißt A selbstadjungiert. Betrachtet man Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenelemente $u \in X$ mit $u \neq 0$ eines selbstadjungierten Operators, welche der Eigenwertgleichung

$$Au = \lambda u$$

genügen, so sind Eigenelemente u_1 und u_2 zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 orthogonal. Für beliebige Operatoren $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ sind die Operatorprodukte $A^*A \in \mathcal{L}(X,X)$ und $AA^* \in \mathcal{L}(Y,Y)$ selbstadjungiert. Die von Null verschiedenen Eigenwerte dieser beiden Operatorprodukte sind positiv und stimmen überein.

Jeder Operator A mit einem endlichdimensionalen Bildraum $\dim R(A) = m$ ist kompakt. Dann besitzen die Operatoren A^*A und AA^* eine endliche Folge von m nicht notwendigerweise verschiedenen nichtnegativen Eigenwerten und ein zugehöriges Orthonormalsystem

$$\{u_i\}_{i=1}^m \subset X \quad \text{mit } A^*Au_i = \lambda_i u_i$$

bzw.

$$\{v_i\}_{i=1}^m \subset Y \quad \text{mit } AA^*v_i = \lambda_i v_i.$$

Bei kompakten mit unendlichdimensionalem Bildraum sind die Eigenwerte von A^*A eine gegen Null strebende Folge positiver Zahlen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .. \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq ... \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Auch hier gibt es entsprechende Orthonormalsysteme von Eigenelementen $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset X$ mit $A^*Au_i = \lambda_i u_i$ bzw. $\{v_i\}_{i=1}^\infty \subset Y$ mit $AA^*v_i = \lambda_i v_i$ zu Eigenwerten $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, wobei $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum

$$\overline{R(A^*)} = \overline{R(A^*A)} = N(A)^\perp$$

des Hilbertraums X und $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Teilraum

$$\overline{R(A)} = \overline{R(AA^*)} = N(A^*)^\perp$$

des Hilbertraums Y bilden. Übrigens, der adjungierte Operator zu einem kompakten Operator ist ebenfalls kompakt.

3.1.3 Korrektheitsdefinition von Nashed

Folgen wir den Überlegungen von Nashed, so gelangen wir zu einer weiteren Definition, deren Beziehung zur Hadamardschen Definition wir im folgenden diskutieren werden.

Definition: Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y heißt korrekt nach Nashed, wenn der Bildraum des Operators A abgeschlossen ist, d.h. wenn gilt

$$R(A) = \overline{R(A)}. \tag{3.2}$$

Ist der Bildraum von A nicht abgeschlossen, gilt also

$$R(A) \neq \overline{R(A)}, \tag{3.3}$$

so heißt (3.1) inkorrekt nach Nashed. Sie heißt *inkorrekt vom Typ I*, falls A kein kompakter Operator ist, und *inkorrekt vom Typ II*, falls es sich bei A um einen kompakten Operator handelt.

Da jeder endlichdimensionale Teilraum abgeschlossen ist, sind lineare Operatorgleichungen mit endlichdimensionalem Bild immer korrekt nach Nashed. Die Inkorrektheit vom Typ I ist dadurch gekennzeichnet, dass der Bildraum wenigstens einen unendlichdimensionalen abgeschlossenen Teilraum enthält. Dagegen führen kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalen Bildräumen auf Inkorrektheit vom Typ II. Nashed selbst bemerkt in seinen Arbeiten, dass die Inkorrektheit vom Typ I weniger stark ist als die vom Typ II. Das lässt sich damit begründen, dass kompakte Operatoren viel mehr glätten als nicht kompakte.

3.1.4 Moore-Penrose-Inverse, Stabilität, Beispiele

Im Kapitel 2 haben wir uns bei der Diskussion der Korrektheit linearer Operatorgleichungen nach Hadamard vielfach auf den Fall eines injektiven Operators zurückgezogen. Im Hilbertraum können wir auch relativ bequem den nichtinjektiven Fall behandeln, indem wir mit verallgemeinerten Inversen arbeiten. Wir konzentrieren uns hier auf die Moore-Penrose-Inverse $A^\dagger$. Unter Verwendung dieser verallgemeinerten Inversen von A werden wir zeigen können, dass die Korrektheit nach Nashed gleichwertig ist mit der Erfüllung der Stabilitätsbedingung von Hadamard. Die Korrektheitsbedingung von Nashed ist also weder an Existenz von Lösungen noch an deren Eindeutigkeit gebunden.

Im Zusammenhang mit der Überwindung der Mehrdeutigkeit bei der Lösung von Identifikationsproblemen haben wir den Begriff Minimum-Norm-Lösung eingeführt. Für die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y kann man entsprechend formulieren, dass ein Element $x_{mn} \in X$ mit

$$\|Ax_{mn} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_y \tag{3.4}$$

Minimum-Norm-Lösung genannt wird, wenn

$$x_{mn} = \min\{\|\tilde{x}\| : \ \|A\tilde{x} - y\|_Y = \min_{x \in X} \|Ax - y\|_y, \ \tilde{x} \in X\} \tag{3.5}$$

gilt. Wir überlegen uns, dass für $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ eine solche Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = x_{mn}(y)$ stets existiert und eindeutig bestimmt ist. Jedes Element $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ kann man nämlich darstellen in der Form

$$y = A\tilde{x} + y_{ort}, \quad \tilde{x} = x_0 + x_{ort}$$

Dabei sind für gegebenes y die Elemente $y_{ort} \in R(A)^\perp = N(A^*)$ und $x_{ort} \in N(A)^\perp$ eindeutig bestimmt, während das Nullraumelement x_0 beliebig gewählt werden kann. Wegen

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \|Ax - A\tilde{x}\|_Y^2 + \|y_{ort}\|^2$$

minimieren genau alle Elemente $\tilde{x}$ welche auch die Gleichung $A^*A\tilde{x} = A^*y$ erfüllen, die Defektnorm $\|Ax - y\|_Y$. Darunter ist wegen $\|\tilde{x}\|_X^2 = \|x_0\|_X^2 + \|x_{ort}\|_X^2$ das Element $x_{mn} = x_{ort}$ das eindeutig bestimmte normkleinste Element und damit eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung. Übrigens existieren keine Minimum-Norm-Lösungen für $y \notin R(A) \oplus R(A)^\perp$ (siehe Aufgabe 3.1).

Wir können nun die auf der Menge $R(A) \oplus R(A)^\perp$ definierte *Moore-Penrose-Inverse* $A^\dagger$ von A über die Beziehung

$$A^\dagger y := x_{mn}, \quad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp \tag{3.6}$$

einführen. Wichtige Eigenschaften von $A^\dagger$ findet man im folgendem Lemma.

Lemma 9 *Der in Hilberträumen X und Y über die Beziehung (3.6) definierte Operator*

$$A^\dagger : Y \supset R(A) \oplus R(A)^\perp \to X$$

ist linear mit

$$N(A^\dagger) = R(A)^\perp \quad \textit{und} \quad R(A^\dagger) = N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}.$$

Weiter ist $A^\dagger$ genau dann stetig, wenn $R(A)$ abgeschlossen ist.

Dieses Lemma impliziert direkt das folgende Ergebnis.

Theorem 9 *Die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y ist korrekt nach Nashed genau dann, wenn die Moore-Penrose-Inverse $A^\dagger$ des Operators A stetig ist.*

im Falle der Korrektheit nach Nashed existieren für beliebige Eingangsdaten $y \in Y$ Minimum-Norm-Lösungen x_{mn} zu (3.1). Darüber hinaus ist $A^\dagger$ ein auf dem gesamten Hilbertraum Y definierter beschränkter linearer Operator $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y,X)$. Kleine Störungen in der rechten Seite führen dann auch nur zu kleinen Änderungen in der Minimum-Norm-Lösung. Wie der folgende Satz zeigt, hat dies aber auch noch weitergehende Konsequenzen für die Stabilität des Problems (3.1) im Sinne der Korrektheitsdefinition von Hadamard.

Theorem 10 *Für eine lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y ist die Konvergenzbedingung (2.2) und damit die Hadamardsche Stabilitätsbedingung genau dann erfüllt, wenn (3.1) korrekt nach Nashed ist.*

Ist (3.1) korrekt nach Nashed, dann ist also $R(A) = \overline{R(A)}$ erfüllt und $A^\dagger \in \mathcal{L}(Y,X)$. Wir erhalten somit für eine Folge $\{y_n\} \subset R(A)$ mit $\|y_n - y_0\|_Y \to 0$ von gestörten Elementen zu $y \in R(A)$ und zugehörigen Urbildmengen

$$U(y_n) = \{x \in X : \; Ax = y_n\} = \{x = A^\dagger y_n + x_N : \; x_N \in N(A)\} \quad (n = 0, 1, ..)$$

die Beziehung (2.2) und damit die Stabilitätsbedingung der Hadamardschen Definition, *weil* wir mit $\|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X)} < \infty$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \operatorname{qdist}(U(y_n), U(y_0)) &:= \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X \\ &= \|A^\dagger (y_n - y_0)\|_X \le \|A^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|y_n - y_0\|_Y \to 0 \end{aligned}$$

bekommen. Hier haben wir schon die Identität

$$\operatorname{qdist}(U(y_n), U(y_0)) = \sup_{x_n \in U(y_n)} \inf_{x_0 \in U(y_0)} \|x_n - x_0\|_X = \|A^\dagger (y_n - y_0)\|_X$$

für $y_n \in R(A)$ verwendet. Diese Identität gilt auch, wenn (3.1) inkorrekt nach Nashed ist, also $R(A) \neq \overline{R(A)}$ gilt. Dann ist $A^\dagger$ ein linearer unbeschränkter

Operator. Wegen der Unbeschränktheit von $A^\dagger$ gibt es dann eine Folge $\{f_n\} \subset R(A)$ mit $\|f_n\|_Y = 1$ mit $\varphi_n := \|A^\dagger f_n\|_X \to \infty$ für $n \to \infty$. Setzt man $\delta_n := \|y_n - y_0\|_Y$ und $y_n := y_0 + \delta_n f_n$, so erhält man

$$\mathrm{qdist}(U(y_n), U(y_0)) = \|y_n - y_0\|_Y \|A^\dagger f_n\|_X = \delta_n \varphi_n.$$

Nur dann, wenn δ_n schnell genug gegen Null strebt, ist

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n \varphi_n = 0.$$

Es gibt also Folgen $y_n \to y_0$ in Y, für die (2.2) verletzt ist. Die Stabiltätsbedingung von Hadamard ist somit nicht erfüllt, sobald (3.1) inkorrekt nach Nashed ist.

Aus den obigen Überlegungen folgt auch, dass unter der Bedingung (3.3) ($R(A) \neq \overline{R(A)}$) die Minimum-Norm-Lösungen $A^\dagger y_n$ zu gestörter rechter Seite $y_n \in R(A)$ von (3.1) nicht notwendigerweise gegen die Minimum-Norm-Lösung $A^\dagger y_0$ zu exakter rechter Seite streben, wenn mit $y_n \to y_0$ in Y die Störungen für $n \to \infty$ beliebig klein werden.

An drei Beispielen wollen wir uns nun die drei möglichen Alternativen der Definition, Korrektheit, Inkorrektheit vom Typ I und Inkorrektheit vom Typ II veranschaulichen. Wir beginnen mit dem nach Nashed korrekten Fall. Als Folgerung von Theorem 10 erhält man bei Betrachtung endlichdimensionaler Räume:

Folgerung 6 *Wenn der Bildraum $R(A)$ endlichdimensional ist, erfüllt die Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y immer die Hadamardsche Stabilitätsbedingung. Dies ist insbesondere dann stets der Fall, wenn X und Y selbst endlichdimensionale Räume sind.*

<u>Beispiel 3.1</u> Ein klassisches Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie, das seit mehr als 20 Jahren von Meteorologen und Mathematikern gleichermaßen mit Interesse betrachtet wird, ist die Rekonstruktion vertikaler Lufttemperaturprofile. Auf der Grundlage von Messdaten von einem in großer Höhe befindlichen Satelliten über einen festen Punkt der Erdoberfläche soll die vertikale Temperaturverteilung ermittelt werden. Die Kenntnis der Temperaturverteilung in verschiedenen Höhen der Erdatmosphäre stellt einen wichtigen Faktor für eine zuverlässige Wettervorhersage dar.

Dabei ist die Lösung des inversen Problems aus indirekten Messungen wesentlich wirtschaftlicher als die direkte Messung der vertikalen Temperaturverteilung. Bei letzterer benötigt man Ballons, die Wettersonden in große Höhen tragen. Das ist zum einen sehr teuer und zum anderen über unbewohnten Gebieten nur schwierig zu realisieren. Am Bord des Satelliten befinden sich Infrarotmessgeräte, die in Frequenzbereichen die Intensität der Wärmestrahlung der zwischen Satellit und Erdboden liegende Luft messen können. Unterteilt man diesen Bereich in n Höhenschichten, so kann das Identifkationsproblem näherungsweise als lineares Gleichungsssystem

$$Ax = b \tag{3.7}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten formuliert werden, wobei die Elemente a_{ji} der rechteckigen Matrix

$$A = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

numerische Werte für die mittlere Durchlässigkeit der i-ten Höhenschicht der Atmosphäre in Bezug auf Wärmestrahlung aus dem j-ten gemessenen Frequenzbereich enthalten, deren näherungsweise Kenntnis für die Behandlung des betrachteten indirekten Messproblems unverzichtbar ist. Die Komponente x_i des in diesem Identifikationsproblems gesuchten Vektors x stellt die mittlere Temperatur der i-ten Höhenschicht dar, während die Komponente y_j des Datenvektors y die gemessene Intensität der Wärmestrahlung im j-ten Frequenzbereich zum Ausdruck bringt. Das möglicherweise überbestimmte ($m > n$) oder unterbestimmte ($m < n$) lineare Gleichungssystem ist ein Spezialfall der linearen Operatorgleichung in den endlichdimensionalen Hilberträumen $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$. Als Skalarprodukte wählt man im einfachsten Fall die natürlichen (Euklidischen) Skalarprodukte. Die rechteckige Matrix A repräsentiert hier den linearen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aus (3.1). Da das betrachtete Problem endlichdimensional ist, ist der Operator A automatisch stetig und sogar kompakt. Die Moore-Penrose-Inverse $A^\dagger$ wird durch die Pseudoinverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ repräsentiert. Das Problem (3.7) erfüllt wegen Folgerung 6 die Hadamardsche Stabiltätsbedingung, d.h. es gibt für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutig bestimmte Minimu-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$, die stetig von y abhängt. Für den sogenannten Vollrangfall $\operatorname{rang}(A) = n$, gilt

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

und damit die Darstellung

$$x_{mn} = (A^T A)^{-1} A^T y \tag{3.8}$$

mit einer regulären Matrix $A^T A$. Dieser Vollrangfall entspricht der Situation des injektiven Operators A in (3.1). Für den Fall $m < n$ und $\operatorname{rang}(A) = m$ sei auf die Aufgabe 3.2 verwiesen. Obwohl lineare Gleichungssysteme (3.7) mit rechteckiger Matrix A stets korrekt nach Nashed sind, können sie, wie im Beispiel 2.2 erläutert, schlechtkonditioniert sein. Damit führen kleine Fehler in der rechten Seite zu großen Fehlern in der Minimum-Norm-Lösung.

Die Konditionszahl hat im Fall einer Rechteckmatrix die Form

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_{\mathbb{R}^{m\times n}} \|A^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n\times m}}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{span}(g_1, ..g_m) := \left\{ z \in Z : z = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j,\ \lambda_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, .., m) \right\}$$

die lineare Hülle der Elemente $\{g_j\}_{j=1}^m$. Sind diese Elemente linear unabhängig, so bilden die lineare Hülle $\tilde{Z} = \operatorname{span}(g_1, ..g_m)$ einen m-dimensionalen Teilraum von Z. Die Elemente $g_1, ..g_m$ stellen eine Basis dar in diesem Teilraum $\tilde{Z}$.

Abgesehen von den in Beispiel 3.1 betrachteten linearen Gleichungssystemen treten nach Nashed korrekte Operatorgleichungen (3.1) auch in unendlichdimensionalen Hilberträumen X und Y auf, wenn der Bildraum $R(A)$ endlichdimensional ist $\dim(R(A)) = m$. Dann heißt der Operator A ausgeartet und ist kompakt. Darüber hinaus gilt die Darstellung

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} \langle x, f_j \rangle_X g_j, \tag{3.9}$$

wobei $\{g_j\}_{j=1}^m$ eine Basis des Bildraums $R(A)$ bezeichnet. Die Ausdrücke $\langle x, f_j \rangle_X$ mit $f_j \in X$ stellen nach dem Satz von Riesz existierende beschränkte lineare Funktionale auf dem Raum X dar.

Eine in X lösbare Operatorgleichung (3.1) mit A vom Typ (3.9) kann als lineares Gleichungssystem geschrieben werden, wenn man den Ansatz

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i \quad \text{mit } \operatorname{span}(Ah_1, .., Ah_n) = \operatorname{span}(g_1, .., g_m), \quad Ah_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} g_j$$

und $y = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j g_j$. verwendet. Wegen

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A h_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i g_j = \sum_{j=1}^{m} y_j g_j = y$$

müssen genau die m linearen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j$$

erfüllt sein. Auch wenn mit $\dim(R(A)) = \infty$ der Operator A nicht ausgeartet ist, kann der Bildraum $R(A)$ abgeschlossen sein. Das ist zum Beispiel bei Integralgleichungen zweiter Art der Fall. Diese Gleichungen spielen jedoch bei der Identifkation von Parameterfunktionen praktisch kaum eine Rolle.

Ein Kriterium zur Unterscheidung kompakter Operatoren von nicht kompakten liefert das folgende Lemma. Dieses erweist sich als nützlich, um nach Nashed inkorrekte Aufgaben vom Typ I und vom Typ II zu unterscheiden.

Lemma 10 *In Hilberträumen X und Y beschränkte Operatoren $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ sind genau dann kompakt, wenn für jede in X schwach konvergente Folge $x_n \rightharpoonup x_0$ die zugehörige Bildfolge stark in Y $Ax_n \to Ax_0$ für $n \to \infty$ konvergiert.*

Für das folgende Beispiel einer nach Nashed vom Typ I inkorrekten Operatorgleichung (3.1) benötigen wir als Bildraum den unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum l^2, der alle quadratisch summierbaren unendlichen Zahlenfolgen $\xi = \{\xi_n\}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$$

enthält. Dabei bilden

$$\langle \xi, \zeta \rangle_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n \tag{3.10}$$

und

$$\|\xi\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2} \tag{3.11}$$

Skalarprodukt und Norm in diesem Raum. Der dazu analoge separable Hilbertraum für reelle Funktionen ist der von uns schon mehrfach verwendete Raum L^2 der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Beispiel 3.2 In diesem Beispiel betrachten wir das inverse Problem der Identifikation einer auf dem Einheitsintervall definierten elektrischen Ladungsdichte $x(t)$ aus Daten der k-ten Momente

$$m_k(x) = \int_0^1 t^k x(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, ..)$$

der Ladungsverteilung. Dieses Problem wird auch Hausdorffsches Momentenproblem genannt. Man kann dieses Problem als System

$$m_{j-1}(x) = y_j \qquad (j = 1, 2, ..)$$

mit unendlich vielen Gleichungen in der Funktion x schreiben. Die rechte Seite bildet eine unendliche Zahlenfolge $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$. Für die Operatorgleichung (3.1) benutzen wir hier die Hilberträume $X = L^2(0,1)$ und $Y = l^2$ sowie den linearen Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1), l^2)$

$$(Ax)_j := \int_0^1 t^{j-1} x(t)\, dt \qquad (j = 1, 2, ..). \tag{3.12}$$

Es lässt sich zeigen, dass für den Operator A aus (3.12) die Beziehungen

$$\|Ax\|_{l^2} \le \sqrt{\pi}\|x\|_{L^2(0,1)} \quad \text{und} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(L^2(0,1),l^2)} := \sup_{x \in L^2(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_{l^2}}{\|x\|_{L^2(0,1)}} = \sqrt{\pi}$$

gelten. Falls das hier definierte Hausdorffsche Momentenproblem lösbar ist, was nur für spezielle Datenfolgen $\{y_j\}$ der Fall sein wird, so ist es eindeutig lösbar, d.h. A ist injektiv. Darüber hinaus gilt das folgende Theorem:

Theorem 11 *Die aus dem Hausdorffschen Momentenproblem resultierende lineare Operatorgleichung (3.1) mit $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1), l^2)$ aus Formel (3.12) ist inkorrekt nach Nashed vom Typ I, d.h. der Bildraum $R(A)$ ist nicht abgeschlossen, A^{-1} ist also unbeschränkt aber A ist kein kompakter Operator.*

Wir überzeugen uns von der Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems, indem wir ein Orthonormalsystem $\{e_n\} \subset L^2(0,1)$ betrachten, dessen Funktionen überall gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es gilt

$$\|e_n\|_{C[a,b]} \le C < \infty \qquad \text{für } n = 1, 2, ..$$

Zum Beispiel bilden die Funktionen $e_n = \sqrt{2}\sin n\pi t$ ein solches System. Dann haben wir schwache Konvergenz $e_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(0,1)$ und für die Bildfolge ergibt sich

$$\|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 t^{j-1}e_n(t)\;dt\right)^2 \le C^2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^1 t^{j-1}\;dt\right)^2 = C^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{C^2\pi^2}{6}.$$

Wegen $e_n \rightharpoonup 0$ und der Tatsache, dass jede der Funktionen t^{j-1} ein Element in $L^2(0,1)$ vertritt, gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{j-1}e_n(t)\;dt = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, ..$$

Dies hat nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für Reihen die Vertauschbarkeit der Grenzübergänge zur Folge. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}\|Ae_n\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 t^{j-1}e_n(t)\;dt\right)^2 = 0.$$

Im Falle injektiver Operatoren A gilt stets $x = A^\dagger Ax$ für alle Elemente des betrachteten Hilbertraumes. Wäre nun $A^\dagger$ ein beschränkter linearer Operator, so müsste für eine Konstante $K > 0$ und alle n die Abschätzung

$$\|e_n\|_{L^2(0,1)} \le \|A^\dagger(Ae_n)\|_{L^2(0,1)} \le K\|Ae_n\|_{l^2}$$

gelten. Wegen $\|e_n\|_{L^2(0,1)} = 1$ und $\|Ae_n\|_{l^2} \to 0$ für $n \to \infty$ kann eine solche Eigenschaft nicht gelten. Daher ist $R(A) \ne \overline{R(A)}$ und das Problem inkorrekt nach Nashed.

Um die Aussage von Theorem 11 vollständig zu erhalten, zeigen wir nun noch dass die Inkorrektheit des Hausdorffschen Momentenproblems vom Typ I ist also dass A nicht kompakt ist. Wir betrachten dazu eine in $L^2(0,1)$ schwach gegen Null konvergente Folge die in $L^\infty(0,1)$ nicht gleichmäßig beschränkt ist und deren Bildfolge $\{Ax_n\} \subset l^2$ nicht gegen das Nullelement in l^2 strebt. So eine Folge von Funktionen ist zum Beispiel

$$x_n(t) = \sqrt{n}t^n.$$

Das sieht man wie folgt: Die schwache Konvergenz $x_n \rightharpoonup 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n(\tau)\;d\tau = 0$$

für alle $t \in [0,1]$. Wir haben für diese Argumente aber offensichtlich

$$|\int_0^t \sqrt{n}\tau^n \, d\tau| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} t^{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$$

für $n \to \infty$. Weiter gilt $\|Ax_n\|_{l^2} \not\to 0$ für $n \to \infty$ wegen

$$\begin{aligned}
\|Ax_n\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{j-1} \sqrt{n} t^n \, dt \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+j} \right)^2 \\
&= n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \\
&\geq n \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \, dt \\
&= \frac{n}{n+1},
\end{aligned}$$

da der letzte Ausdruck nicht gegen Null konvergiert. Wäre A kompakt, so müsste $x_n \rightharpoonup$ in $L^2(0,1)$ nach Lemma 10 die Beziehung $Ax_n \to 0$ in l^2 implizieren. Dies ist aber nicht der Fall, womit die Behauptungen des Theorems 11 sämtlich gezeigt sind. □

Wir wenden uns nun dem wichtigen Fall einer linearen Operatorgleichung (3.1) im Hilbertraum mit kompakten Operator A zu, d.h. Inkorrektheit vom Typ II nach Nashed.

Beispiel 3.3 Wir kehren zurück zum Beispiel aus der Gravimetrie aus Übungsaufgabe 1.1. Dabei betrachten ein Flugzeug, das in Höhe 1 über ein Intervall der Länge L fliegt. Ziel ist die Bestimmung einer Anomalie der Massendichte. Für diese eindimensionale Aufgabe finden wir die Formel

$$\int_0^L ((s-t)^2+1)^{-3/2} x(t) \, dt = y(s) \qquad (0 \leq s \leq L). \tag{3.13}$$

Für die Formulierung der Operatorgleichung wählen wir die Räume $X = Y = L^2(0,L)$ mit einem Operator wie in Formel (2.14) beschrieben. Es sei noch erwähnt, dass der Kern der Integralgleichung (3.13) nicht ausgeartet im

Sinne von Formel (3.9) ist, d.h. es gilt $\dim R(A) = \infty$. Der ausgeartete Fall würde eine Kerndarstellung

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t) g_i(s)$$

erfordern, die sich hier nicht finden lässt. Da die Kernfunktion auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist, besitzt sie natürlich auch die Eigenschaft der quadratischen Integrierbarkeit $k \in L^2((0,L)\times(0,L))$. Dann ist der in diesem Beispiel betrachtete Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0,L), L^2(0,L))$ wegen Lemma 3 kompakt. Da aber die Injektivität des Operators nicht sofort erkennbar ist (siehe Aufgabe 3.3), lässt sich die vermutete Inkorrektheit von (3.13) im Sinne von $R(A) \neq \overline{R(A)}$ und damit die Verletzung der Stabilitätsbedingung nicht ohne weiteres schlussfolgern. Die nachfolgenden allgemeinen Betrachtungen zeigen jedoch, dass (3.13) inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist, ohne dass dafür die Injektivität von A benötigt wird. Grundlage dafür ist das folgende Lemma (siehe Engl S.152).

Lemma 11 *Die Moore-Penrose-Inverse $A^\dagger$ eines in Hilbertraum X und Y definierten kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\dim R(A) = \infty$ ist ein unbeschränkter und damit unstetiger linearer Operator.*

Als direkte Folge der Lemmata 9 und 11 erhalten wir den folgenden Satz, der die Situation vom Korrektheit und Inkorrektheit im Fall kompakter Operatoren umfassend beschreibt.

Theorem 12 *Im Falle eines kompakten Operators A ist die lineare Operatorgleichung (3.1) in den Hilberträumen X und Y korrekt nach Nashed genau dann, wenn der Bildraum $R(A)$ des Operators A endlichdimensional ist. Anderenfalls, d.h. für kompaktes A und $\dim R(A) = \infty$ ist (3.1) inkorrekt nach Nashed vom Typ II.*

Als unmittelbare Folge aus diesem Theorem ergibt sich, dass die Integralgleichung (3.13) des Gravimetrieproblems aus Beispiel 3.3 inkorrekt nach Nashed vom Typ II ist und damit die Stabilitätsbedingung (2.2) verletzt ist. Das letzte Theorem besagt aber viel mehr, nämlich dass alle linearen Fredholmschen

Integralgleichungen (2.12) mit nicht ausgearteten quadratisch integrierbarem Kern $k \in L^2((c,d) \times (a,b))$ im Raumpaar $X = L^2(a,b)$ und $Y = L^2(c,d)$ unabhängig von der Erfüllung der Eindeutigkeitsbedingung instabil sind. Damit können beliebig kleine Fehler in den Datenfunktionen zu beliebig großen Abweichungen der erhaltenen Lösungsfunktionen führen.

3.1.5 Singulärwertzerlegung kompakter Operatoren

Die Grundlage für die Untersuchung linearer Operatorgleichungen (3.1) mit kompakten Operatoren A bildet der im nächsten Lemma formulierte Polarzerlegungssatz. Wir verwenden hier die Formulierung von Baumeister (S.60-61).

Lemma 12 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein kompakter Operator, der zwischen den separablen Hilberträumen X und Y wirkt. Dann existieren eine Indexmenge $J = \{1, 2, .., m\}$ für den Fall $\dim R(A) = m$ bzw. $J = \mathbb{N} = \{1, 2, ..\}$ für den Fall $\dim R(A) = \infty$, Orthonormalsysteme $\{u_j\}_{j \in J}$ in X bzw. $\{v_j\}_{j \in J}$ in Y und eine Folge $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ positiver reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

$$\{\sigma_j\}_{j \in J} \text{ ist nicht wachsend, und es gilt } \lim_{j \to \infty} \sigma_j = 0 \text{ für } J = \mathbb{N}; \tag{3.14}$$

$$Au_j = \sigma v_j \quad (j \in J) \qquad \text{und} \qquad A^* v_j = \sigma_j u_j \quad (j \in J). \tag{3.15}$$

Für alle x in X gibt es ein Element $x_0 \in N(A)$ mit

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \langle x, u_j \rangle_X u_j \qquad \text{und} \qquad Ax = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle x, u_j \rangle v_j. \tag{3.16}$$

Es gilt für alle $y \in Y$

$$A^* y = \sum_{j \in J} \sigma_j \langle y, v_j \rangle_y u_j. \tag{3.17}$$

Dieses Lemma besagt, dass es für einen kompakten Operator in jedem Fall ein singuläres System im Sinne folgender Definition gibt.

Definition Es seien X und Y separable Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein kompakter Operator. Dann heißt die zur Indexmenge J mit

$$J = 1, 2, .., m \text{ für } \dim R(A) = m$$

bzw.

$$J = \mathbb{N} = \{1, 2, ..\} \text{ für } \dim R(A) = \infty$$

gehörende Tripelfolge

$$\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j \in J}$$

singuläres System für A, wenn $\sigma_j > 0$ und $v_j \in Y$ wie im Lemma 12 definiert sind und die Bedingungen (3.14)-(3.17) erfüllen. Insbesondere heißen die Zahlen σ_j Singulärwerte von A. Weiterhin nennt man die in Formel (3.16) angegebene Zerlegung Singulärwertzerlegung des Operators.

Es sei vermerkt, dass

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sigma_1 \tag{3.18}$$

gilt und aus (3.15) sofort

$$A^*Au_j = \sigma_j^2 u_j \quad \text{sowie} \quad AA^*v_j = \sigma_j^2 v_j \tag{3.19}$$

folgen, d.h. die singulären Werte sind definiert als Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte λ_j sowohl des Operators A^*A als auch AA^*. Die Orthonormalsysteme $\{u_j\}_{j\in J}$ bzw.$\{v_j\}_{j\in J}$ des singulären Systems sind im $\overline{R(A^*)}$ bzw. $\overline{R(A)}$ vollständige Orthonormalsysteme der Eigenelemente von A^*A bzw. AA^*.

Unter Verwendung der gerade definierten singulären Systeme suchen wir nun Lösbarkeitseigenschaften und Lösungsdarstellungen zu linearen Operatorgleichungen (3.1) mit kompakten Operatoren. Unabhängig von der Korrektheit oder Inkorrektheit solcher Gleichungen, können ihre Lösungen mit Hilfe von Fourierreihen explizit ausgedrückt werden. Jede rechte Seite $y \in Y$ lässt sich nämlich darstellen als Fourierreihe

$$y = y_0 + \sum_{j\in J} \langle y, v_j\rangle_Y v_j \tag{3.20}$$

mit einem eindeutig bestimmten Element $y_0 \in N(A^*)$, wobei $\langle y_0, v_j\rangle_Y = 0$ für alle $j \in J$ gilt. Für die Lösung x in (3.1) verfügt man nun über die Darstellung (3.16). Damit erhält die Operatorgleichung (3.1) in Reihenform die Gestalt

$$\sum_{j\in J} \sigma_j \langle x, u_j\rangle_X v_j = y_0 + \sum_{j\in J} \langle y, v_j\rangle_Y v_j. \tag{3.21}$$

Aus der Gleichung (3.21) folgt unmittelbar, dass $y_0 = 0$ bzw. damit gleichwertig $y \in N(A^*)^\perp$ eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (3.1) darstellt. Um daraus aber eine hinreichende Bedingung zu erhalten, müssen zum einen zusätzlich die Gleichungen

$$\sigma_j \langle x, u_j \rangle_X = \langle y, v_j \rangle_X \text{ für alle } j \in J$$

zwischen den Fourierkoeffizienten von Lösung und rechter Seite gelten, zum anderen muss

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j \tag{3.22}$$

tatsächlich ein Element des Hilbertraums X repräsentieren. In der Darstellung (3.22), die alle potentielle Lösungen von (3.1) besitzen, bedeutet $x_0 \in N(A)$ ein beliebig gewähltes Nullraumelement. Dabei ist im Fall eines ausgearteten Operators A mit $J = \{1, 2, .., m\}$

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

stets ein Element aus X. Für alle $y \in Y$ stellt dann speziell

$$x_{mn} = A^\dagger y = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j$$

die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung dar. Interessanter ist der nichtausgartete Fall mit $\dim R(A) = \infty$ für welchen in der Darstellung (3.22) die Bedingung $x \in X$ der Picardschen Bedingung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2} < \infty \tag{3.23}$$

entspricht. Die Picardsche Bedingung, welche die Zugehörigkeit der Folge von Quotienten

$$\frac{\langle y, v_j \rangle_Y^2}{\sigma_j^2}$$

zum Raum l^2 fordert und die eine Konvergenzbedingung für die in (3.22) auftretende Fourierreihe darstellt, ist genau dann erfüllt, wenn

$$y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$$

gilt, also die Elemente y zum Definitionsbereich der Moore-Penrose-Inversen $A^\dagger$ gehören. Wegen

$$\|Ax-y\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(\sigma_j\langle x,u_j\rangle_X - \langle y,v_j\rangle_Y)^2 + \|y_0\|_Y^2$$

ist für die Elemente $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$

$$x_{mn} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y,v_j\rangle_Y}{\sigma_j} u_j \tag{3.24}$$

Minimum-Norm-Lösung von (3.1). Die Moore-Penrose-Inverse besitzt für kompakte Operatoren A also im allgemeinen die Darstellung

$$A^\dagger y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle y,v_j\rangle_Y}{\sigma_j} u_j, \qquad y \in R(A) \oplus R(A)^\perp. \tag{3.25}$$

Theorem 13 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ in separablen Hilberträumen X und Y ein kompakter Operator mit dem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j\in J}$. Die lineare Operatorgleichung (3.1) besitzt genau dann eine Lösung, wenn $y \in N(A^*)^\perp$ gilt und im Falle $\dim R(A) = \infty$ die Picardsche Bedingung (3.23) erfüllt ist. Alle Elemente x, die der Darstellung (3.22) genügen, sind dann Lösungen von (3.1). Für rechte Seiten $y \in R(A) \oplus R(A)^\perp$ charkterisiert die Darstellung (3.22) genau die Elemente mit der kleinsten Defektnorm $\|Ax-y\|_Y$ Unter diesen Elementen ist dann mit $x_0 = 0$ die eindeutig bestimmte Minimum-Norm-Lösung $x_{mn} = A^\dagger y$ von (3.1) zu finden.*

Der über einen Operator vom Typ (3.9) beschriebene ausgeartete Fall der linearen Operatorgleichung (3.1) kann, wie wir gesehen haben, durch ein lineares Gleichungssystem (3.7) beschrieben werden. Wir verwenden in den Räumen $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ die Euklidische Norm und das entsprechende Skalarprodukt und bezeichnen mit $r = \text{rang}\,(A) \leq \min(m,n)$ den Rang der Matrix A. Dann existiert für die Matrix A ein singuläres System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}$ mit den singulären Werten

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$$

und zwei Orthonormalsysteme von Vektoren

$$\{u_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und } \{v_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^m,$$

so dass die Beziehungen

$$Au_j = \sigma_j v_j, \quad A^* v_j = \sigma_j u_j \qquad (j = 1, 2, .., r) \tag{3.26}$$

gelten und eine Singulärwertzerlegung der Matrix A existiert in Form des Matrizenproduktes

$$A = V \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 \end{array} \right) U^T \tag{3.27}$$

mit den orthogonalen Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Für othogonale Matrizen, deren Zeilen und Spalten zueinander paarweise orthogonal sind gilt bekanntlich $U^T = U^{-1}$. Aus der Singulärwertzerlegung (3.27) der Matrix A mit rang $(A) = r$ lässt sich unmittelbar die Pseudoinverse $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A^\dagger = U \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sigma_1} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \frac{1}{\sigma_r} & 0 \\ \hline 0 & ... & 0 & 0 \end{array} \right) V^T \tag{3.28}$$

als spezielle Moore-Penrose-Inverse für diese endlichdimensionale Situation ableiten. In Verallgemeinerung zum Vollrangfall rang $(A) = n$ kann man damit die Minimum-Norm-Lösung eines allgemeinen linearen Gleichungssystems (3.7) mit rang $(A) = r \le \min(m, n)$ in der Form

$$x_{mn} = A^\dagger y = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle y, v_j \rangle}{\sigma_j} u_j \tag{3.29}$$

schreiben. Aus den obigen Überlegungen zur Singulärwertzerlegung von Matrizen A folgt für die Spektralnorm die Darstellung

$$\text{cond } (A) = \|A\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \|A^\dagger\|_{\mathbb{R}^{n \times m}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

der Konditionszahl.

Wir setzen in den nun folgenden Betrachtungen dieses Abschnitts voraus, dass $\dim(A) = \infty$ gilt, d.h. dass A nicht ausgeartet ist. Eine besonders wichtige Klasse solcher Operatoren bilden Hilbert-Schmidt-Operatoren.

Definition: Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt Hilbert-Schmidt-Operator, wenn für ein in X vollständiges Orthonormalsystem $\{e_j\} \subset X$ gilt:

$$S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|_Y^2 < \infty \tag{3.30}$$

Lemma 13 *Hilbert-Schmidt-Operatoren A sind stets kompakt und erfüllen für alle in X vollständigen Orthonormalsysteme $\{e_j\}$ die Beziehung*

$$S(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \|Ae_j\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty.$$

Als Konsequenz aus diesem Lemma erhalten wir, dass für einen Hilbert-Schmidt-Operator die Summe $S(A)$ unabhängig ist von der Wahl des Orthonormalsystems $\{e_j\}$. Man kann darüber hinaus zeigen, dass ein kompakter Operator genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, wenn die Folge $\{\sigma_j\}$ seiner Singulärwerte quadratisch summierbar ist, also ein Element im Raum l^2 bildet.

Die linearen Fredholmschen Integraloperatoren A vom Typ (2.14) in den Räumen $X = L^2(a, b)$ und $Y = L^2(c, d)$ mit quadratisch integrierbarem Kern $k \in L^2((c, d) \times (a, b))$ sind Hilbert-Schmidt-Operatoren, wobei die Beziehungen

$$S(A) = \int_c^d \int_a^b (k(s,t))^2 \, dt ds = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

und im Falle eines von der Nullfunktion verschiedenen Kerns

$$k(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j u_j(t) v_j(s) \tag{3.31}$$

gelten, wenn $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j=1}^{\infty}$ ein singuläres System von A bezeichnet. Die Konvergenz dieser Reihe ist im Sinne des Raumes $L^2((c, d) \times (a, b))$ zu verstehen.

Wir wollen uns nun die Gestalt singulärer Systeme am Beispiel verdeutlichen. Dazu betrachten wir den kompakten Operator aus Beispiel 2.1

$$(Ax)(s) = \int_0^s x(t) \, dt \qquad (0 \leq s \leq 1) \tag{3.32}$$

im Raum $X = Y = L^2(0,1)$. Wendet man die im Abschnitt 3.1.2 eingeführte Gleichung zur Definition des adjungierten Operators A^* an, so lässt sich die Darstellung

$$(A^*y)(t) = \int_t^1 y(s)\, ds \qquad (0 \le t \le 1)$$

und schließlich

$$(A^*Ax)(\tau) = \int_\tau^1 \int_0^s x(t)\, dtds.$$

finden. Die Eigenwertgleichung $A^*Au = \lambda u$ führt auf das Randwertproblem

$$-u(t) = \lambda u''(t) \quad (0 \le t \le 1),\ u(1) = u'(0) = 0,\ \|u\|_{L^2(0,1)} = 1,$$

dessen Lösungen

$$\lambda_j = \frac{4}{(2j-1)^2\pi^2}, \quad u_j = \sqrt{2}\cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \le t \le 1)$$

die singulären Werte

$$\sigma_j = \frac{2}{(2j-1)\pi} \quad (j = 1, 2, ...) \tag{3.33}$$

liefern. Man sieht wegen $\{\sigma_j\} \in l^2$ sofort, dass A ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Mit

$$v_j(t) = \frac{1}{\sigma}(Au_j)(t) = \sqrt{2}\sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t$$

erhält man das singuläre System

$$\left\{\frac{2}{(2j-1)\pi};\ \sqrt{2}\cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t;\ \sqrt{2}\sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi t \quad (0 \le t \le 1)\right\}_{j=1}^{\infty}$$

für den Operator (3.32). Die dabei auftretenden Orthonormalsysteme $\{u_j\}$ und $\{v_j\}$ sind vollständig in $L^2(0,1)$. Man erkennt, dass die Eigenfunktionen u_j und v_j umso stärker oszillieren, je größer j und damit je kleiner der Wert σ_j ausfällt. Die Situation, dass Singulärwerte nahe Null zu hochfrequenten Eigenfunktionen gehören, ist typisch für das Verhalten großer Klassen kompakter Operatoren im Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel eines Hilbert-Schmidt-Operators, dessen Singulärwerte σ_j für $j \to \infty$ exponentiell, also extrem schnell gegen Null streben. Im Fall des Operators (3.32) hatte die Singulärwertfolge ein Verhalten wie $1/j$. Die Bedeutung dieser Abklingraten wird uns im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit dem Grad der Inkorrektheit einer linearen Operatorgleichung (3.1) beschäftigen.

Beispiel 3.4 Zu den klassischen inversen Problemen gehört die Aufgabe der Rekonstruktion des Anfangstemperaturprofils $x(\rho)$ $(0 \le \rho \le 1)$ eines homogenen Stabes der Länge 1, dessen von der Ortskoordinate ρ und der Zeitkoordinate t abhängigen Temperaturen $u(\rho, t)$ dem Anfangs-Randwertproblem zur eindimensionalen Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u(\rho,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(\rho,t)}{\partial \rho^2} \qquad (0 \le \rho \le 1,\ 0 \le t \le 1)$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (0 \le t \le 1)$$

und der Anfangsbedingung

$$u(\rho,0) = x(\rho) \qquad (0 \le \rho \le 1)$$

genügen, aus Messungen

$$y(\rho) = (Ax)(\rho) := u(\rho,1) \qquad (0 \le \rho \le 1) \tag{3.34}$$

des Temperaturprofils des Stabes zur Erndzeit $t = 1$. Der in (3.34) definierte Operator A ist in $X = Y = L^2(0,1)$ linear und kompakt. Funktionen u, die der Differentialgleichung und den Randbedingungen genügen, lassen sich als Reihe

$$u(\rho,t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-j^2\pi^2 t) \sin j\pi\rho$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten c_j darstellen. Daraus resultiert das singuläre System

$$\{\exp(-j^2\pi^2);\ \sqrt{2}\sin j\pi\rho\ (0 \le \rho \le 1);\ \sqrt{2}\sin j\pi\rho\ (0 \le \rho \le 1)\}_{j=1}^{\infty}$$

des Operators A aus (3.34). Dieser Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1), L^2(0,1))$ ist selbstadjungiert und injektiv. Er lässt sich als Hilbert-Schmidt-Operator in Form eines Integraloperators

$$(Ax)(\rho) = \int_0^1 k(\rho,\eta)x(\eta)\, d\eta \quad (0 \le \rho \le 1)$$

mit der Formel (3.31) entsprechenden Reihendarstellung

$$k(\rho,\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} 2\exp(-j^2\pi^2)\sin j\pi\rho \sin j\pi\eta \qquad (0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \eta \le 1)$$

der Kernfunktion schreiben. Die Kernfunktion $k(.,.)$ verkörpert dabei die Greensche Funktion des entsprechenden Anfangswertproblems zur Wärmeleitgleichung.

3.1.6 Der Grad der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen

Bisher haben wir uns ausführlich mit der Inkorrektheit linearer Operatorgleichungen (3.1) beschäftigt. Dabei haben wir niemals die Frage gestellt, wie stark inkorrekt solche Identifikationsprobleme sind. Die gut strukturierte Klasse injektiver, kompakter Operatoren in Hilberträumen X und Y erlaubt Antworten auf diese weitergehende Fragen.

Diese Fragestellung ist stark durch numerische Untersuchungen motiviert. Es zeigt sich, dass solche Aufgaben ganz unterschiedliche numerische Schwierigkeiten generieren. Der Computer kann natürlich nur mit diskretiserten Problemen arbeiten. Wir gehen daher von einem endlichdimensionalen Raum X aus und von einem vollständigen Orthonormalsystem

$$X_n := \text{span}\ (w_1, w_2, ..., w_n).$$

Unter der näherungsweisen numerischen Lösung wollen wir die Konstruktion eines Elements $x_n \in X_n$ verstehen, welches Lösung des auf den Teilraum X_n eingeschränkten Kleinste-Quadrate-Problems

$$\|Ax - y\|_Y = \min !, \quad x \in X_n \tag{3.35}$$

ist. Aus den Überlegungen von Abschnitt 3.1.4 folgt, dass

$$x = A_n^\dagger y$$

für alle $y \in Y$ die in X_n wegen der Injektivität von A eindeutig bestimmte Lösung bildet. Dabei stellt $A_n^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X_n)$ die Moore-Penrose-Inverse des

Operators $A_n \in \mathcal{L}(X_n, Y)$ dar, der mittels der Vorschrift $A_n x = Ax$ für $x \in X_n$ als Einschränkung von A auf X_n definiert wird.

Es sei nun $x_0 \in X$ die für eine feste rechte Seite y_0 eindeutig bestimmte Lösung von (3.1). Wir betrachten den Fehler einer Näherungslösung $\|x_n^\delta - x_0\|_X$ einer Näherungslösung

$$x_n^\delta = A_n^\dagger y_\delta$$

zu einer gestörten rechten Seite y_δ mit $\|y - y_\delta\|_Y \leq \delta$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir dafür

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|x_n^\delta - x_n\|_X + \|x_n - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} \|y_\delta - y\|_Y + \|A_n^\dagger y - x_0\|_X$$

und damit

$$\|x_n^\delta - x_0\|_X \leq \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} \delta + \|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X. \tag{3.36}$$

Die Schranke für den Fehler der Näherungslösung x_n^δ im Sinne der rechten Seite zerfällt in zwei Terme. Der erste Term $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)}\delta$ charakterisiert die *Stabiltät* der Näherungslösung in Bezug auf Störungen in den Daten. Der zweite Term $\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X$ beschreibt die Approximationseigenschaften von x_0 durch geeignete Elemente aus X_n. Bei geschickter Wahl des Orthonormalsystems strebt dieser Wert gegen Null für $n \to \infty$. Wählt man $\{w_j\} = \{u_j\}$ mit $\{u_j\}$ aus dem singulären System von A, so gilt für $y = Ax_0$

$$A_n^\dagger y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle y, v_j \rangle_Y}{\sigma_j} u_j = \sum_{j=1}^{n} \langle x_0, u_j \rangle_X u_j$$

und damit

$$\|A_n^\dagger A x_0 - x_0\|_X = \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle x_0, u_j \rangle_X^2} \to 0. \tag{3.37}$$

Um den Approximationsfehler klein zu halten, empfiehlt es sich also bei der numerischen Lösung von (3.1) die Dimension n so groß wie möglich zu wählen. Die Inkorrektheit nach Nashed ist aber, wie Theorem 10 gezeigt hat, immer mit Instabiltät verbunden. Diese kommt in der Abschätzung (3.36) durch $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)}$ zum Ausdruck. Dieser Faktor wir mit dem Datenfehler multipliziert. Im nächsten Lemma sehen wir, dass dieser Ausdruck mit $n \to \infty$ auch gegen unendlich strebt. Je größer n gewählt wird, desto stärker wirken sich die Datenfehler in der Näherungslösung aus. Diese widersprüchlichen Tendenzen kann man praktisch durch Wahl eines “mittleren Diskretisierungsniveaus“ n handhaben, welches einen Kompromiss zwischen Approximation und Stabilität darstellt.

Lemma 14 *Bei beliebiger Wahl des die Teilräume X_n generierenden Orthonormalsystems $\{w_j\}$ gilt für*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} = \left(\min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right)^{-1} \tag{3.38}$$

die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} = \infty.$$

Die Aussage dieses Lemmas folgt aus der Tatsache, dass für die unbeschränkte Inverse A^{-1} eines injektiven kompakten Operators A eine unendliche Folge $\{z_j\} \subset X$ existiert mit $z_j \neq 0$ und

$$\frac{\|Az_j\|_Y}{\|z_j\|_X} \to 0 \quad \text{für } j \to \infty. \tag{3.39}$$

Wäre nun die Grenzwertbeziehung

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} = \infty.$$

verletzt, so gäbe es unter Berücksichtigung der Darstellung (3.38) eine Folge von Dimensionen n_i und eine Konstante $\varepsilon > 0$, so dass für alle $z \in X_{n_i}$ die Ungleichung

$$\|Az\|_Y \geq \varepsilon \|z\|_X$$

gilt. Die n_i-dimensionalen Approximationen $z_j^{n_i} = \sum\limits_{l=1}^{n_i} \langle z_j, w_l \rangle_X w_l$ erfüllen dann für alle i und j die Bedingung

$$\|Az_j^{n_i}\|_Y \geq \varepsilon \|z_j^{n_i}\|_X$$

und mit $\lim\limits_{i\to\infty} \|z_j^{n_i} - z_j\|_X = 0$ die Ungleichung

$$\|Az_j\|_Y \geq \varepsilon \|z_j\|_X.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Grenzwertbeziehung (3.39).

Sucht man nach Teilräumen X_n, die den "Instabilitätsfaktor" $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)}$ in der rechten Seite möglichst klein halten, so leistet dafür das im nächsten Lemma formulierte Maximum-Minimum-Prinzip von Poincaré und Fischer gute Dienste.

Lemma 15 *Es sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein kompakter linearer Operator in separablen Hilberträumen X und Y mit einem singulären System $\{\sigma_j; u_j; v_j\}_{j\in J}$. Dann gilt für alle $n \in J$*

$$\sigma_n = \max_{X_n \subset X} \min_{x \in X_n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \min_{x \in span(u_1,u_2,..,u_n)\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|Au_n\|_Y \quad (3.40)$$

Dabei ist das Maximum in Formel (3.40) über alle n-dimensionalen Teilräume X_n des Hilbertraums X zu nehmen.

Daraus ergibt sich wegen Formel (3.38) sofort:

Folgerung 7 *Die Norm $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)}$ wird bezüglich aller n-dimensionalen Teilräume X_n von X minimal für $X = span(u_1,..,u_n)$, d.h., es gilt*

$$\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} \geq \frac{1}{\sigma_n} \text{ und } \|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)} = \frac{1}{\sigma_n} \text{ für } X_n = span(u_1,..,u_n). \quad (3.41)$$

Wählt man die Teilräume X_n optimal als erste n Elemente des singulären Systems, so verhält sich die Näheringslösung im Sinne der Abschätzung (3.36) am stabilsten gegenüber Datenstörungen. Die Kehrwerte der singulären Werte spielen dann die Rolle der "Instabiltätsfaktoren". Je schneller die Folge $\{\sigma_n\}$ der Singulärwerte gegen Null strebt, umso schneller wächst der Multiplikator $\|A_n^\dagger\|_{\mathcal{L}(Y,X_n)}$ selbst im besten Falle gegen unendlich. So macht es Sinn, den Grad der Inkorrektheit einer Operatorgleichung (3.1) über die Abklingrate der Singulärwertfolge des Operators A gegen Null zu definieren.

Definition: Wir bezeichnen eine lineare Operatorgleichung (3.1) mit kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ in separablen Hilberträumen X und Y als höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$, wenn für die Singulärwertfolge $\{\sigma_n\}$ des Operators A eine Konstante $\overline{C} > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{\sigma_n} \leq \overline{C} n^\nu \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{3.42}$$

Analog bezeichnen wir eine solche Gleichung als mindestens inkorrekt vom Grad $\nu > 0$, wenn eine Konstante $\underline{C}$ existiert mit

$$\frac{1}{\sigma_n} \geq \underline{C} n^\nu \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{3.43}$$

Haben wir beide Ungleichungen, d.h., es gilt $\sigma_n \sim n^{-\nu}$, so nennen wir die positive Zahl ν Grad der Inkorrektheit. Die Proportionalität entspricht also der Existenz zweier Konstanten $) < \underline{C} \leq \overline{C} < \infty$ mit

$$\underline{C} n^\nu \leq \frac{1}{\sigma_n} \leq \overline{C} n^\nu \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{3.44}$$

Gilt für jedes positive ν eine Ungleichung (3.43), so sagen wir, dass der Grad der Inkorrektheit unendlich ist. Wenn eine Operatorgleichung höchstens inkorrekt vom Grade 1 ist, so nennt man sie auch schwach inkorrekt. Man spricht von mäßig inkorrekten Gleichungen, wenn es eine endliche Zahl ν gibt, so dass (3.42) gilt, anderenfalls heißen solche Gleichungen stark inkorrekt. Je höher der Grad der Inkorrektheit einer inversen Aufgabe (3.1) ausfällt, desto kleiner muss man die Diskretiserungsdimension n in (3.35) wählen, um bei festem Datenfehlerniveau $\delta > 0$ noch einen akzeptablen Fehler (3.36) der Näherungslösung x_n^δ abzusichern. Daraus kann man folgende Interpretation ableiten: Will man ein fest vorgegebenes Fehlerniveau der Näherungslösung nicht überschreiten, so kann man bei stark inkorrekten Aufgaben nur eine sehr kleine Anzahl n von Parameterwerten aus den gegebenen fehlerhaften Daten rekonstruieren. Bei schwach inkorrekten Aufgaben fällt diese Anzahl deutlich höher aus. Im Kapitel 4 werden wir mit Hilfe von Regulariserungsverfahren danach streben, auch bei stärker inkorrekten Aufgaben eine größere Anzahl von Parametern näherungsweise zu ermitteln. Bei der Regularisierung und auch bei der Auswahl numerischer Verfahren spielt der Grad der Inkorrektheit eine wesentliche Rolle.

Im vorigen Abschnitt haben wir im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$ bereits für den Operator aus (3.32) (Identifikation der ersten Ableitung) die Singulärwertfolge (3.33) bestimmt. Für diese gilt offensichtlich

$$\sigma_n \sim n^{-1}.$$

Wir haben es beim Differentiationsproblem also mit einem Grad $\nu = 1$ der Inkorrektheit zu tun. Wir sind damit genau an der Grenze zwischen schwach und mäßig inkorrekten Problemen. Im Beispiel 3.4 haben wir für das Wärmeleitproblem mit Zeitumkehr die Singulärwertfolge

$$\sigma_n = \exp(-n^2\pi^2)$$

ermittelt. Dieses in Operatorgleichung (3.34) formulierte inverse Problem ist daher stark inkorrekt und sein Grad der Inkorrektheit ist unendlich, da die Folge der Singulärwerte schneller fällt als jede Potenz $n^{-\nu}$ für endliches positives ν.

Beispiel 3.5 In diesem Beispiel betrachten wir im Raum $X = Y = L^2(0,1)$ die für reelle Zahlen $r > 0$ definierte Familie

$$(A_r x)(s) = \int_0^s \frac{(s-t)^{r-1}}{\Gamma(r)} x(t)\, dt = y(s) \quad (0 \le s \le 1) \tag{3.45}$$

von speziellen linearen Integraloperatoren A_r der gebrochenen Integration. Dabei bezeichnet $\Gamma(r)$ die Gammafunktion zum Argument r. Die Familie (3.45) gehört zu den linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art

$$\int_0^s k(s,t)x(t)\, dt = y(s) \quad (0 \le s \le 1) \tag{3.46}$$

einer Teilklasse der linearen Fredholmschen Integralgleichungen erster Art

$$\int_0^1 k(s,t)x(t)\, dt = y(s) \quad (0 \le s \le 1), \tag{3.47}$$

wobei die im Quadrat $(0,1) \times (0,1)$ definierte Kernfunktion k bei den Volterraschen Integralgleichungen im Dreieck $\{(s,t):\ 0 \le s < t \le 1\}$ identisch verschwindet. Unter den linearen Volterraschen Integralgleichungen erster Art gehört die Familie (3.45) wiederum zu den linearen Faltungsgleichungen

$$\int_0^s k(s-t)x(t)\, dt = y(s) \quad (0 \le s \le 1) \tag{3.48}$$

deren Kernfunktionen k nur von der Differenz der Argumente s und t abhängen. Die Bezeichnung "gebrochene Integration" im zusammenhang mit dem Operator A_r lässt sich damit begründen, dass (3.45) für natürliche Zahlen $r = l$ in der Form

$$\int_0^s \frac{(s-t)^{l-1}}{(l-1)!} x(t)\, dt = y(s) \quad (0 \le s \le 1) \tag{3.49}$$

dem Problem der Identfikation der l-ten Ableitung $x(t) = y^{(l)}(t)$ einer Funktion $y(t)$ aus Werten der Funktion entspricht. Dabei gibt es stetige Lösungen x von (3.49) natürlich nur für l-mal stetig differenzierbare Funktionen $y \in C^l[0,1]$ mit

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = ... = y^{(l-1)}(0) = 0.$$

Die Gleichung (3.45) lässt sich als Verallgemeinerung dieses Problems (3.49) der l-maligen Differentiation auffassen. Man kann daher von der Identifikation von Ableitungen einer gebrochenen Ordnung r sprechen.

Für den Zahlenbereich $0 < r < 1$ wird (3.45) als Abelsche Integralgleichung bezeichnet, für die es zahlreiche Anwendungen bei inversenen Problemen z.B. der Mechanik, Stereologie und Geophysik gibt. Eine Zusammenstellung dieser Anwendungen zur Theorie Abelscher Integralgleichungen findet man im Buch von Gorenflo und Vessella. Bei solcher Wahl des Parameters r sind im Gegensatz zum Fall $r \geq 1$ die Kernfunktionen des Integraloperators A_r nicht mehr stetig, sondern schwach singulär, d.h. sie weisen für $s = t$ auf der Diagonale des Quadrats $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ eine Polstelle auf, die aber in dem Sinn schwach ausgeprägt ist, dass die entsprechenden Kernfunktionen k in der Variante (3.48) die Darstellung

$$k(\tau) = \frac{1}{\tau^{1-r}} \qquad (0 \leq \tau \leq 1)$$

besitzt, die für $0 < r < 1$ integrierbar ist und somit zum Raum $L^1(0,1)$ gehört. Aus der Youngschen Ungleichung ergibt sich für $x \in L^2(0,1)$ und $k \in L^1(0,1)$ aber $Ax \in L^2(0,1)$ mit A aus (3.48) und es gilt eine Abschätzung

$$\|Ax\|_{L^2(0,1)} \leq \|k\|_{L^1(0,1)} \|x\|_{L^2(0,1)}.$$

Daher haben wir in (3.45) für alle $r > 0$ einen beschränkten linearen Operator $A_r \in \mathcal{L}(L^2(0,1), L^2(0,1))$ vorliegen, der auch kompakt ist. Aber nur für $r > 1/2$ ist der Kern des Integraloperators quadratisch integrierbar und damit A_r ein Hilbert-Schmidt-Operator. Allgemein lässt sich für die Singulärwerte von A_r in $L^2(0,1)$ zeigen, dass

$$\sigma_n \sim n^{-r} \quad \text{für alle } r > 0$$

gilt. Das Problem (3.49) der l-maligen Differentiation ist also vom Inkorrektheitsgrad l und damit mäßig inkorrekt, wobei mit wachsendem Differentiationsniveau l die Schwierigkeiten der Aufgabe steigen. Dagegen ist die Abelsche Integralgleichung mit einem Grad $0 < r < 1$ nur schwach inkorrekt.

Beispiel 3.6 Lineare Faltungsgleichungen

$$\int_0^s k(s-t)x(s)\,dt = y(s) \qquad (0 \le s \le T) \tag{3.50}$$

als Spezialfall Volterrascher Integralgleichungen erster Art treten bei der Interpretation indirekter Messungen auf, wenn die Werte $x(t)$ $(0 \le t \le T)$ einer von der Zeit abhängigen Größe aus den gemessenen Werten $y(s)$ $(0 \le s \le T)$ der Faltung

$$\int_0^s k(s-t)x(s)\,dt$$

der Funktion x mit einer Kernfunktion k bestimmt werden sollen. Die Kernfunktion als Apparatefunktion definiert den inneren Mechanismus der Messung, wobei nur Werte $x(t)$ $(0 \le t \le s)$ aus der Vergangenheit den Messwert $y(s)$ zum aktuellen Zeitpunkt s beeinflussen. Diese Situation ist typisch für Evolutionsgleichungen.

Anwendungen für dieses Modell gibt es sehr viele. So kann zum Beispiel bei der Fluoreszenzspektrokopie die Funktion x die innere Struktur komplexer Strukturen beschreiben und y die meßbare Fluoreszenzreaktion. In der Nuklearmedizin steht die Funktion x für die Funktionstüchtigkeit innerer Organe. Gemessen wird die Substratmenge y gewisser schwach radioaktiver Substanzen. Die Verarbeitung dieser Stoffe gibt Aufschluss darüber, ob eine Stoffwechselstörung vorliegt. Die Kernfunktion beschreibt hier die Verarbeitungsraten für die jeweilige Substanz im Körper. Eine dritte Anwendung findet sich in der Geophysik bei der Modellierung von Untergrundgasspeichern. Man misst den zeitlich veränderlichen Gasdruck y und möchte Aussagen über das "Speichergedächtnis" x gewinnen.

Wir betrachten daher nun den linearen Faltungsoperator

$$(Ax)(s) = \int_0^s k(s-t)x(t)\,dt \qquad (0 \le s \le 1) \tag{3.51}$$

im Raum $X = Y = L^2(0,1)$. Dazu nehmen wir an, dass die Kernfunktion k den Bedingungen

$$k \in L^2(0,1) \quad \text{und} \quad \sup\{s : k(\tau) = 0 \text{ für fast alle } \tau \in [0,s]\} = 0 \tag{3.52}$$

genügt. Der quadratisch integrierbare Kern k impliziert die Zugehörigkeit von A zur Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren. Weiter ist gefordert, dass die Kernfunktion in der Nähe der Null nicht identisch verschwindet. Diese zweite Bedingung in (3.52) sichert die Injektivität von A und damit die Eindeutigkeit von Lösungen der Faltungsgleichung. Diese Aussage liefert der Satz von Titchmarsh, der hier als Lemma formuliert ist:

Lemma 16 *Es seien $f \in L^2(0,1)$ und $g \in L^2(0,1)$ zwei Funktionen und $\gamma \in (0,1]$ eine positive reelle Zahl, so dass*

$$\int_0^s f(s-t)g(t)\,dt = 0 \qquad \text{für fast alle } s \in [0,\gamma]$$

gilt. Dann existieren Zahlen $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $\alpha + \beta \geq \gamma$ und $f(t) = 0$ für fast alle $t \in [0,\alpha]$ sowie $g(t) = 0$ für fast alle $t \in [0,\beta]$.

Gilt nun für den Faltungsoperator (3.51) $Ax = 0$ in $L^2(0,1)$ und für kein $0 < \varepsilon \leq 1$ die Beziehung $k(\tau) = 0$ für fast alle $\tau \in [0,\varepsilon]$, so muss wegen des Lemmas $x(t) = 0$ sein für fast alle $t \in [0,1]$. Somit gilt $x = 0$ in $L^2(0,1)$ und der Operator $A \in \mathcal{L}(L^2(0,1), L^2(0,1))$ erweist sich als injektiv. Vorstellungen über den Grad der Inkorrektheit liefert das folgende Theorem:

Theorem 14 *Im Raum $X = Y = L^2(0,1)$ ist jede Operatorgleichung (3.1) mit einem linearen Faltungsoperator (3.51), dessen Kern k der Bedingung (3.52) genügt, mindestens inkorrekt vom Grad $\nu = 1/2$. Ist für eine positive ganze Zahl l der Kern darüber hinaus $(l-1)$-mal stetig differenzierbar und besitzt eine quadratisch integrierbare l-te Ableitung, d.h. es gilt*

$$k \in C^{l-1}[0,1] \quad \text{und} \quad k^{(l)} \in L^2(0,1), \tag{3.53}$$

so ist die Gleichung sogar mindestens inkorrekt vom Grade $\nu = l + 1/2$, wenn zusätzlich für die Ableitungen des Kerns die Bedingung

$$k(0) = k'(0) = \ldots = k^{(l-1)}(0) = 0 \tag{3.54}$$

erfüllt ist.

Sind $k \in C^{l-1}[0,1]$ und (3.54) für beliebig große Zahlen l erfüllt, so hat die Faltungsgleichung den Inkorrektheitsgrad unendlich. Je glatter der Kern wird, desto größer fällt der Grad der Inkorrektheit aus. Dies deckt sich mit der gerade gewonnenen Erkenntnissen aus Beispiel 3.5, wo im Falle der Abelschen Integralgleichungen mit einer Polstelle im Kern die kleinsten Inkorrektheitsgrade festgestellt wurden. Die mit wachsendem l zunehmend glatter werdenden Kerne waren von wachsenden Inkorrektheitsgraden begleitet. Allerdings wachsen die Inkorrektheitsgrade nur dann an, wenn im Sinne von (3.54) immer höhere Ableitungen an der Stelle $t = 0$ verschwinden. Dies ist auch eine Glattheitsforderung, aber jetzt an den Kern

$$k(s,t) = \begin{cases} k(s-t) & (0 \le t \le s \le 1) \\ 0 & (0 \le s < t \le 1) \end{cases}$$

des zugehörigen Fredholmschen Integraloperators (2.14) mit $a = c = 0$ und $b = d = 1$ beim Übergang über die Diagonale $s = t$ des Quadrats $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$.

Theorem 15 *Wir betrachten im Raum $X = Y = L^2(0,1)$ die lineare Fredholmsche Integralgleichung erster Art*

$$(Ax)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt = y(s) \qquad (0 \le s \le 1) \tag{3.55}$$

mit $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$. Dann gilt für die Singulärwerte des Operators A

$$\sigma_n \le C(n)n^{-1/2} \quad (n = 1, 2, ..) \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} C(n) = 0.$$

Falls darüber hinaus die Funktionen

$$k,\ \frac{\partial k}{\partial s},\ \frac{\partial^2 k}{\partial s^2},\ ...,\frac{\partial^{l-2} k}{\partial s^{l-2}}$$

stetig in s sind für fast alle t und

$$\frac{\partial^{l-1} k}{\partial s^{l-1}} = \int_0^s g(t,\tau)\,d\tau + h(t)$$

mit $g \in L^2((0,1) \times (0,1))$ und $h \in L^1(0,1)$ gilt, so haben wir sogar

$$\sigma_n \le C(n)n^{-(l+1/2)} \quad (n = 1, 2, ..) \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty} C(n) = 0. \tag{3.56}$$

Offenbar ist Theorem 14 eine direkte Konsequenz von Theorem 15. Als Literatur in Bezug auf Theorem 15 sei das Buch von Engl empfohlen. Ist bei Faltungsgleichungen die sehr einschneidende Forderung (3.54) nicht erfüllt, so liegt der Inkorrektheitsgrad niedriger. Deshalb kann man allgemein davon ausgehen, dass bei vergleichbaren Differentiationseigenschaften des Kernes Volterrasche Integralgleichungen weniger inkorrekt als Fredholmsche Integralgleichungen sind, falls nicht zusätzlich alle Werte der Kernfunktion $k(s,t)$ und ihre sämtlichen Ableitungen bis zur höchsten Ordnung für $s = t$ verschwinden. Die Beziehung (3.54) charakterisiert gerade so einen Ausnahmefall für die Faltungsgleichung.

Unmittelbar aus Theorem 15 erhalten wir für Fredholmsche Integralgleichungen (3.47) eine Folgerung über den Inkorrektheitsgrad in Abhängigkeit von der Kernglattheit.

Folgerung 8 *Eine lineare Fredholmsche Integralgleichung (3.47) mit* $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$ *ist mindestens inkorrekt vom Grad* $1/2$*. Unter den in Theorem 15 formulierten Glattheitsbedingungen an die Kernfunktion* k *ist die Gleichung (3.47) sogar mindestens inkorrekt vom Grad* $\nu = l + 1/2$*.*

Es sei noch erwähnt, dass man aus der Kernglattheit keine Informationen darüber erhält, welchen Inkorrektheitsgrad eine solche Integralgleichung höchstens aufweist.

Falls die Singulärwerte $\{\sigma_n\}$ eines kompakten linearen Operators $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ bzw. deren Abklingraten und damit der Grad der Inkorrektheit nicht unmittelbar verifizierbar sind, so kann man versuchen, den Operator A mit Hilfe eines anderen Operators $B \in \mathcal{L}(X,Z)$ (X, Y, Z separable Hilberträume) in der Form

$$\underline{c}\|Bx\|_Z \leq \|Ax\|_Y \leq \overline{c}\|Bx\|_Z \qquad \text{für alle } x \in X \tag{3.57}$$

und Konstanten $0 < \underline{c} \leq \overline{c} < \infty$ abzuschätzen, wenn die Singulärwertfolge $\{\tilde{\sigma}_n\}$ des Operators B oder wenigstens deren Abklingraten bekannt sind. Wegen Lemma 15 folgen dann aus (3.57) und (3.40) die Ungleichungen

$$\underline{c}\tilde{\sigma}_n \leq \sigma_n \leq \overline{c}\tilde{\sigma}_n \qquad (n = 1, 2, ..). \tag{3.58}$$

Ein Inkorrektheitsgrad ν von B überträgt sich auf den Operator A und umgekehrt (siehe Aufgabe 3.4). Wir demonstrieren diese Vorgehensweise am

Beispiel des Operators aus (3.32) im Sobolevraum $X = Y = H^1(0,1)$. Für das Differentitionsproblem

$$\int_0^s x(t)\,dt = y(s) \qquad (0 \le s \le 1) \tag{3.59}$$

wissen wir aus Abschnitt 3.1.5, dass bei Betrachtung von Lösungen x und rechten Seiten y im Raum $L^2(0,1)$ der Inkorrektheitsgrad $\nu = 1$ auftritt. Um den entsprechenden Inkorrektheitsgrad im Sobolevraum $H^1(0,1)$ zu bestimmen, betrachten wir $A \in \mathcal{L}(H^1(0,1), H^1(0,1))$ als den zu (3.59) gehörigen Operator und nutzen die Definition der Sobolevnorm

$$\|Ax\|_{H^1(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^s x(t)\,dt\right)^2 ds + \int_0^1 (x(t))^2\,dt} = \sqrt{\|Ax\|^2_{L^2(0,1)} + \|x\|^2_{L^2(0,1)}}.$$

Wegen (3.18) und (3.33) ergibt sich daraus

$$\|x\|_{L^2(0,1)} \le \|Ax\|_{H^1(0,1)} \le \sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}\|x\|_{L^2(0,1)} \qquad \text{für alle } x \in H^1(0,1) \tag{3.60}$$

eine Ungleichung vom Typ (3.57). Dabei haben wir $Z = L^2(0,1)$, $\underline{c} = 1$, $\overline{c} = \sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}$ und einen Operator $B \in \mathcal{L}(H^1(0,1), L^2(0,1))$ mit $Bx = x$ für alle $z \in H^1(0,1)$, der die Einbettung des Raumes $H^1(0,1)$ in den Raum $L^2(0,1)$ beschreibt. Nun lässt sich für diesen kompakten Einbettungsoperator B das singuläre System mit den Komponenten

$$\tilde{\sigma}_j = \frac{1}{\sqrt{1+(j-1)^2\pi^2}} \qquad (j = 1,2,...),$$

$\tilde{u}_1 \equiv 1$, $\tilde{u}_j = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1+(j-1)^2\pi^2}}}\cos(j-1)\pi t$ und $\tilde{v}_1 \equiv 1$, $\tilde{u}_j = \sqrt{2}\cos(j-1)\pi t$ explizit aufschreiben. Damit haben wir eine Abklingrate $\tilde{\sigma}_n \sim n^{-1}$ der Singulärwerte von B. Demzufolge gibt es Konstanten $0 < c_1 \le c_2 < \infty$ mit

$$\frac{c_1}{n} \le \sigma_n \le \frac{c_2}{n}$$

für die Singulärwertfolge $\{\sigma_n\}$ von $A \in \mathcal{L}(H^1(0,1), H^1(0,1))$. Das Differentiationsproblem (3.59) ist also auch im Raum $H^1(0,1)$ inkorrekt vom Grad $\nu = 1$.

3.2 Nichtlineare Operatorgleichungen und ihr lokales Korrektheitsverhalten in Hilberträumen

Im Kapitel 2 haben wir uns mit lokaler Korrektheit und Inkorrektheit von Identifikationsproblemen

$$F(x) = y \qquad x \in D \subset X,\ y \in Y \tag{3.61}$$

in Banachräumen beschäftigt. Wir wollen diese Diskussion nun weiter verfolgen unter der Annahme dass X und Y Hilberträume sind. Dazu werden jetzt einige Begriffe zur genauen Charakterisierung nichtlinearer Operatoren F bereitgestellt.

3.2.1 Einige weitere Begriffe zu nichtlinearen Operatoren

Die Kompaktheit eines nichtlinearen Operators F kann völlig zu der im linearen Fall definiert werden: Ein Operator, der beschränkte Mengen in relativ kompakte abbildet, heißt kompakt. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Operatoren ist die schwache Abgeschlossenheit.

Definition: Ein nichtlinearer Operator $F : X \supset D \to Y$, der zwischen Hilberträumen X und Y wirkt, heißt schwach abgeschlossen, wenn für $\{x_n\} \subset D$ die schwache Konvergenz der Folgen $x_n \rightharpoonup x_0$ in X $F(x_n) \rightharpoonup y_0$ in Y die Beziehungen $x_0 \in D$ und $F(x_0) = y_0$ nach sich ziehen.

Lemma 17 *Falls der schwach abgeschlossene Operator $F : X \supset D \to Y$ auf $S \subset D$ kompakt ist, so transformiert F schwach konvergente Folgen $x_n \rightharpoonup x_0$ in X mit $\{x_n\} \subset S$ in stark konvergente Folgen $F(x_n) \to F(x_0)$ in Y.*

Um nichtlineare Operatoren in Tayloreihen entwickeln zu können, wie wir es bei Funktionen reeller Veränderlicher gewöhnt sind, benötigen wir den Begriff der Ableitung des Operators F im Punkt $x_0 \in D$. Wir betrachten zwei verschiedene Varianten einer solchen Ableitung, die Fréchet-Ableitung und die Gâteaux-Ableitung.

Definition: Ein beschränkter linearer Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt Fréchet-Ableitung des Operators $F : X \supset D \to Y$ im Punkt $x_0 \in \mathrm{int}(D)$, wenn es eine offene Kugel $B_r(x_0) \subset D$ und ein positives reelles Funktional $\varepsilon : x \supset B_r(x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ gibt, so dass für alle $x \in B_r(x_0)$ gilt:

$$\|F(x) - F(x_0) - A(x - x_0)\|_Y \leq \varepsilon(x)\|x - x_0\|_X. \tag{3.62}$$

Der Operator F heißt auf der offenen Menge $S \subset D$ Fréchet-differenzierbar, wenn er in allen Punkten $x_0 \in S$ eine Fréchet-Ableitung $F'(x_0) := A$ besitzt.

Gilt für $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ anstelle von Ungleichung (3.62) für hinreichend kleines t und beliebige Elemente $h \in X$ mit $\|h\|_X = 1$ sowie eine positive reelle Funktion ε mit $\lim\limits_{t \downarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ die Beziehung

$$\|F(x_0 + th) - F(x_0) - t(Ah)\|_Y \leq \varepsilon(t)|t|, \tag{3.63}$$

so heißt $F'(x_0) = A$ Gâteaux-Ableitung von F im Punkt x_0. Anschaulich bedeuten beide Ableitungsbegriffe folgendes: Existieren in einem Punkt alle Richtungsableitungen und lassen sich diese beschreiben als linearer Operator angewendet auf die Richtung, dann spricht man von einer Gâteaux-Ableitung. Für eine Fréchet-Ableitung muss, vereinfacht gesagt, zusätzlich das Restglied gleichmäßig gegen Null gehen. Jede Fréchet-Ableitung ist automatisch auch Gâteaux-Ableitung. Jeder auf einer offenen Menge Fŕechet-differenzierbare Operator ist auf dieser Menge auch stetig. Existiert $F'(x_0)$ für alle $x \in B_r(x_0)$ und ist als Abbildung $x \in B_r(x_0) \subset X \mapsto F'(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ stetig, so gilt die Darstellung

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^1 F'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\, dt \qquad (x \in B_r(x_0)) \tag{3.64}$$

Ist außerdem

$$\|F'(x) - F'(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq L\|x - x_0\|_X \qquad (x \in B_r(x_0)), \tag{3.65}$$

so erhalten wir aus (3.64) die Abschätzung

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \frac{L}{2}\|x - x_0\|_X^2 \qquad (x \in B_r(x_0)). \tag{3.66}$$

Für uns ist wichtig, dass sich die Kompaktheit des nichtlinearen Operators auf die Fréchetableitung überträgt. Für mehr Einzelheiten sei auf das Buch von Colton und Kress verwiesen.

Lemma 18 *Es sei $F : X \supset D \to Y$ ein auf der offenen Menge $S \subset D$ kompakter Operator, der im Punkt $x_0 \in S$ Fréchet-differenzierbar ist. Dann stellt die Fréchet-Ableitung $F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ebenfalls einen kompakten Operator dar.*

3.2.2 Hinreichende Bedingungen für lokale Inkorrektheit und lokale Korrektheit

Aus der bisherigen Theorie wissen wir bereits, dass kompakte lineare Operatoren A mit unendlich dimensionalen Bildraum $R(A)$ stets auf inkorrekte Probleme führen, bei denen insbesondere die Hadamardsche Stabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Außerdem konnten wir uns davon überzeugen, dass lokale Inkorrektheit einer nichtlinearen inversen Aufgabe einer lokalen Variante der Stabilitätsbedingung entspricht. Es liegt daher nahe, dass kompakte nichtlineare Operatoren F mit lokal inkorrekten Problemen verbunden sind. Das wollen wir im nächsten Theorem nachweisen. Vorher aber formulieren wir noch einige Voraussetzungen, die uns in diesem Abschnitt stets begleiten sollen: Wir nehmen an, dass der Definitionsbereich D von F wenigstens eine abgeschlossene Kugel

$$\bar{B}_r(x_0) := \{x \in X : \ \|x - x_0\|_X \leq r\} \subset D(F) \tag{3.67}$$

mit positivem Radius r enthält und der Operator F im Inneren $B_r(x_0)$ der Kugel stetige Fréchet-Ableitungen $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ besitzt, die der Glattheitsbedingung (3.65) genügen.

Theorem 16 *Der Definitionsbereich D des zwischen den unendlichdimensionalen Hilberträumen X und Y wirkenden schwach abgeschlossenen Operators F erfülle für eine Kugelradius $r > 0$ die Bedingung (3.67). Weiter sei F auf $\bar{B}_r(x_0)$ kompakt. Dann ist die nichtlineare Operatorgleichung (3.61) in x_0 lokal inkorrekt.*

Wir fixieren in X ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{e_n\} \subset X$. Wir wissen $e_n \rightharpoonup 0$ in X. Dann gilt

$$x_n := x_0 + \rho e_n \in \bar{B}_r(x_0) \quad \text{mit } \|x_n - x_0\|_X = \rho \text{ und } x_n \rightharpoonup x_0,$$

aber $x_n \not\to x_0$ in X für beliebige $0 < \rho \le r$. Nach Lemma 17 folgt aus der schwachen Konvergenz von x_n die starke Konvergenz der Bildelemente $F(x_n) \to F(x_0)$ in Y. Dies entspricht gerade der lokalen Inkorrektheit.

Unter den in Theorem 16 geforderten Bedingungen ist die Kompaktheit von F die entscheidende für die lokale Inkorrektheit von (3.61) in x_0. Aussagen darüber, wie man die Kugelbedingung abschwächen kann findet man bei Engl/Kunisch/Neubauer.

Um eine nichtlineare Gleichung (3.61) in der Umgebung eines Punktes x_0 näherungsweise mit Hilfe einer einfacheren linearen Gleichung lösen zu können, betrachtet man gern die Linearisierung, die sich ergibt, wenn man $F(x)$ in x_0 in eine Taylorreihe bis zum linearen Glied $F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$ entwickelt. So entsteht als Näherung für (3.61) eine lineare Operatorgleichung

$$F'(x_0)x = \tilde{y}, \quad x \in D \subset X, \quad \tilde{y} \in Y, \quad F'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y) \tag{3.68}$$

vom Typ (1.2) mit $\tilde{y} = y - F(x_0) + F'(x_0)x_0$. Wegen Lemma 18 ist für F kompakt auf $\bar{B}_r(x_0)$ auch die Fréchet-Ableitung kompakt. Aufgrund der Ergebnisse von 3.1 erweist sich sie lineare Operatorgleichung (3.68) genau dann als korrekt nach Nashed, wenn $\dim R(F'(x_0)) < \infty$ gilt. Für kompakte Operatoren F und unendlichdimensionale Hilberträume X und Y führt das in x_0 lokal instabile nichtlineare Problem (3.61) entweder auf ein ebenfalls instabiles linearisiertes Problem (3.68) mit $\dim R(F'(x_0)) = \infty$ und einer unbeschränkten Moore-Penrose-Inversen $F'(x_0)^\dagger$ der Fréchet-Ableitung oder aber $F'(x_0)$ ist ausgeartet mit $F'(x_0)^\dagger \in \mathcal{L}(Y, X)$ und einer stabilen linearisierten Gleichung (3.68). Für beide Fälle lassen sich Beispiele angeben.

Man kann die lokale Korrektheit einer nichtlinearen Gleichung (3.61) allerdings erzwingen, indem man den Bereich der zulässigen Lösungen auf eine Menge

$$\tilde{D} = \{x \in D : \; x - x_0 = F'(x_0)^* w, \; w \in Y, \; \|w\|_Y \le \tau\} \tag{3.69}$$

einschränkt. Alle Elemente einer solchen Menge lassen eine *Quelldarstellung*

$$x - x_0 = F'(x_0)^* w \qquad (w \in Y) \tag{3.70}$$

zu, wobei $F'(x_0)^*$ der zu $F'(x_0)$ adjungierte Operator ist.

Theorem 17 *Unter den in diesem Abschnitt formulierten Voraussetzungen an das lokale Verhalten des Operators F in der Umgebung des Punktes x_0 ist die Operatorgleichung*

$$F(x) = y, \qquad x \in \tilde{D} \subset X,\ y \in Y \tag{3.71}$$

mit einem gegenüber der Ausgangsgleichung (3.61) im Sinne von (3.69) eingeschränkten Bereich $\tilde{D}$ zulässiger Lösungen lokal korrekt in x_0, falls

$$\tau \cdot L < 2$$

gilt.

Wir betrachten zum Beweis dieses Theorems die für alle $x \in \tilde{D}$ gültige und aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung resultierende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|x - x_0\|^2 &= \langle x - x_0, F'(x_0)^* w\rangle_X \\
&= \langle F'(x_0)(x - x_0), w\rangle_Y \\
&\leq \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \|w\|_Y \\
&\leq \tau \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich für $x \in \tilde{D} \cap B_r(x_0)$ mit (3.66) und $\theta = \frac{L\tau}{2}$

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \theta \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y.$$

Aus unserer Voraussetzung folgt $\theta < 1$. Die Dreiecksungleichung impliziert

$$\begin{aligned}
\|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y &\leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \\
&\leq \theta \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y \leq \frac{1}{1 - \theta} \|F(x) - F(x_0)\|_Y.$$

Insgesamt erhalten wir für alle $x \in \tilde{D} \cap B_r(x_0)$ die Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_X \leq \sqrt{\frac{\tau}{1 - \theta}} \sqrt{\|F(x) - F(x_0)\|_Y},$$

aus der die lokale Korrektheit von (3.71) folgt.

Gelingt es bei der näherungsweisen Lösung der Gleichung (3.61) in einer Umgebung von x_0 stets solche Näherungslösungen auszuwählen, die der Quelldarstellung (3.70) genügen, so kann man die Instabilität des Problems überwinden. Manche iterative Näherungsverfahren zur Lösung von (3.61) lassen sich in dieser Weise handhaben.

Beispiel 3.7 Wir betrachten für eine lichtdurchlässige Materialschicht der Dicke $d = 1$, in welcher der reelle Parameter t den Abstand eines Schichtpunktes von der Unterkante der Schicht beschreibt, die Profilfunktion $x(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ einer physikalischen Größe, deren nicht direkt messbaren Werte nur von t abhängen. Bei der Schicht kann es sich um einen dünnen Film aber auch um eine Luftschicht in der Erdatmosphäre handeln, wobei $x(t)$ z.B. ein Refraktionsprofil oder Temperaturprofil verkörpern kann. Aus integralen Messdaten $y(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$, die bei der Durchstrahlung der Schicht gewonnen werden, soll im Sinne eines Identifikationsproblems die Materialfunktion x rekonstruiert werden. Diese Daten können zum Beispiel die Intensität der Strahlung als Funktion der Wellenlänge oder des Einfallswinkels s der Strahlung sein. Kennt man die Reaktionsfunktion $k(s,t,x)$ der Schichtbestandteile in der jeweiligen Höhe t auf die Strahlun s, so ist das inverse Problem als *Urysohnsche Integralgleichung*

$$(F(x))(s) = \int_0^1 k(s,t,x(t))\,dt = y(s) \qquad (0 \leq s \leq 1) \tag{3.72}$$

zu schreiben. Wenn mit $f \in L^2((0,1)\times(0,1))$

$$|k(s,t,x)| \leq f(s,t)(c_1 + c_2|x|) \qquad (s,t \in [0,1],\ x \in \mathbb{R})$$

gilt, so ist der Operator $F : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ auf dem ganzen Raum $L^2(0,1)$kompakt und die Gleichung (3.72) damit überall lokal inkorrekt. Falls weiterhin die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial k(s,t,x)}{\partial x^2}$ der Kernfunktion überall existieren und gleichmäßig beschränkt sind, so gibt es für alle $x_0 \in L^2(0,1)$ die Fréchet-Ableitung $F'(x_0)$ des Operators F mit der Darstellung

$$(F'(x_0)h)(s) = \int_0^1 \frac{\partial k(s,t,x_0(t))}{\partial x} h(t)\,dt \qquad (0 \leq s \leq 1,\ h \in L^2(0,1)). \tag{3.73}$$

Der Operator $F'(x_0)$ aus (3.73) ist dann für alle $x_0 \in L^2(0,1)$ ein kompakter linearer Fredholmscher Integraloperator mit quadratisch integrierbarem

Kern. Auch das in Beispiel 3.1 vorgestellte Identifikationsproblem der Satellitenmeteorologie führt bei strenger Modellierung erst einmal auf eine Integralgleichung vom Typ (3.72). Meist wird jedoch bei der näherungsweisen Bestimmung vertikaler Temperaturprofile in der Erdatmosphäre eine Linearisierung (siehe Formel (3.68)) verwendet. Durch Diskretisierung entsteht dann ein lineares Gleichungssystem, welches wir im Beispiel 3.1 diskutiert haben.

Betrachtet man dagegen noch einmal den nichtlinearen Selbstfaltungsoperator $F : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ aus Formel (2.33), so erweist sich dieser als schwach abgeschlossen, aber nicht kompakt auf jeder Kugel $B_r(0)$ (siehe Gorenflo/Hofmann). Von der Nichkompaktheit des Operators F überzeugt man sich leicht anhand der Folge

$$x_n(t) = r \sin nt \qquad (0 \le t \le 1)$$

mit $\{x_n\} \in B_r(0)$, $x_n \rightharpoonup 0$, $\|x_n\|_{L^2(0,1)} \to \frac{r}{2}\sqrt{2} \neq 0$ und

$$(F(x_n))(s) = r^2 \left(\frac{s \cos ns}{2} + \frac{\sin ns}{2n} \right) \qquad (0 \le s \le 1)$$

sowie $F(x_n) \rightharpoonup 0$, aber $\|F(x_n)\|_{L^2(0,1)} \to \frac{r}{12}\sqrt{6} \neq 0$. Die Bildfolge $\{F(x_n)\}$ in $L^2(0,1)$ kann also keine konvergente Teilfolge besitzen und es liegt keine Kompaktheit vor. Interessanterweise ist trotzdem die Fréchet-Ableitung

$$(F'(x_0)h)(s) = 2 \int_0^s x_0(s-t)h(t)\, dt \qquad (0 \le s \le 1,\ h \in L^2(0,1)) \qquad (3.74)$$

für alle $x_0 \in L^2(0,1)$ ein kompakter linearer Faltungsoperator.

3.2.3 Der lokale Grad der Inkorrektheit

Um für ein nichtlineares Identifikationsproblem (3.61) in sinnvoller Weise einen lokalen Grad der Inkorrektheit im Punkt $x_0 \in D$ definieren zu können, benötigt man lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, die das lokale Verhalten des Operators F in einer Umgebung von x_0 hinreichend gut widerspiegeln. Diese Rolle übernimmt natürlich die Fréchet-Ableitung, wie wir uns im nächsten Theorem überzeugen können. Unter dem Grad der Inkorrektheit von (3.61) im Punkt x_0 versteht man dann den Grad der Inkorrektheit der linearisierten Gleichung. Die Welt der nichtlinearen Operatoren ist jedoch sehr reichhaltig.

Es zeigt sich, dass die Verbindung zur Fréchet-Ableitung unterschiedlich eng sein kann. Eine sehr enge Bindung besteht wenn eine η-Bedingung

$$\|F(x) - F(x_0) - F'(x - x_0)\|_Y \leq \eta \|F(x) - F(x_0)\|_Y \tag{3.75}$$

für eine Konstante $\eta > 0$ und alle x aus einer Kugel $\tilde{B}_r(x_0)$ erfüllt wird. Die Fréchet-Ableitung bringt dann die wesentlichen Eigenschaften des nichtlinearen Operators in einer gewissen Umgebung zum Ausdruck. Gilt nur eine Abschätzung (3.69), so kann dieser Zusammenhang wesentlich schwächer sein. In diesem Fall liefert Theorem 17 gute Argumente, sich mit der Abklingrate der Singulärwerte der Fréchetableitung zu beschäftigen.

Um Aufschluss über das Stabilitätsverhalten einer nichtlinearen Operatorgleichung (3.61) im Punkt x_0 zu gewinnen, kann man sich fragen, welche lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine Ungleichung des Typs

$$\|A(x - x_0)\|_Y \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \qquad (x \in B_r(x_0)) \tag{3.76}$$

befriedigen. Betrachtet man solche Operatoren A, so gilt für diese mit $\|z\|_Z = \|Az\|_Y$ $(z \in X)$ eine Stabilitätsabschätzung

$$\|x - x_0\|_Z \leq K \|F(x) - F(x_0)\|_Y \qquad (x \in B_r(x_0)).$$

Dabei erfüllt $\|z\|_Z$ die ersten beiden Normaxiome. Das dritte Normaxiom gilt nur für injektive Operatoren. Wir sprechen daher nur von einer Seminorm. Misst man die Abstände in X in dieser Seminorm, so ist (3.76) diesbezüglich lokal korrekt, wenn (3.76) gilt. Wir suchen unter allen solchen Operatoren A nun denjenigen A_{max} heraus, der maximal ist bezüglich der Halbordnung

$$A_1 \prec A_2 \iff \|A_1 h\|_Y \leq \|A_2 h\|_Y \quad (h \in X), \tag{3.77}$$

d.h. für den stets $A \prec A_{max}$ gilt. Dieser gesuchte Operator ist derjenige mit dem kleinsten Nullraum und mit den geringsten Glättungseigenschaften, unter allen Operatoren A, die (3.76) erfüllen. Es sollte erwähnt werden, dass die Halbordnung (3.77) sich auf Äquivalenzklassen bezieht. Zwei Operatoren gehören zur selben Äquivalenzklasse, falls sie der Beziehung $A_1 \sim A_2$ mit

$$A_1 \sim A_2 \iff c_{min} \|A_2 h\|_Y \leq \|A_1 h\|_Y \leq c_{max} \|A_2 h\|_Y \qquad (h \in X) \tag{3.78}$$

für Konstanten $0 < c_{min} \leq c_{max} < \infty$ genügen.

Theorem 18 *Der Operator F erfülle für $x \in \bar{B}_r(x_0)$ eine η-Bedingung (3.75). Dann ist die Fréchetableitung $F'(x_0)$ ein Repräsentant der eindeutig bestimmten Äquivalenzklasse maximaler Operatoren A_{max} zur Halbordnung (3.77) bezüglich aller beschränkten linearen Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die eine Ungleichung (3.76) befriedigen.*

Die Aussage von Theorem 18 ergibt sich aus der Tatsache, dass die betrachtete Fréchet-Ableitung auch eine Gâteaux-Ableitung mit

$$F'(x_0)h = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t}$$

ist. Dann folgt nämlich für alle $h \in X$ und hinreichend kleinem t die Ungleichung

$$\|A(th)\|_Y \leq K\|F(x_0 + th) - F(x_0)\|_Y$$

und beim Übergang zur Grenze $t \to 0$ auch

$$\|Ah\|_Y \leq K\|F'(x_0)h\|_Y.$$

Damit gilt $A \prec F'(x_0)$ für alle Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die (3.76) erfüllen. $F'(x_0)$ erfüllt aber selbst die Bedingung (3.76), da aufgrund der Dreiecksungleichung und der η-Bedingung gilt

$$\begin{aligned} \|F'(x_0)(x - x_0)\|_Y &\leq \|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\|_Y + \|F(x) - F(x_0)\|_Y \\ &\leq (\eta + 1)\|F(x) - F(x_0)\|_Y. \end{aligned}$$

Somit ist die Fréchet-Ableitung maximaler Operator im Sinne der eingeführten Halbordnung.

Im Anschluss an die Beispiele 2.4 und 2.5 und durch diese angeregt wurde der nichtlineare Operator (2.32) diskutiert und die lokale Inkorrektheit der entsprechenden nichtlinearen Gleichung gezeigt. Wir betrachten für $X = Y = L^2(0, 1)$ diesen auf ganz $L^2(0, 1)$ definierten Operator

$$(F(x))(s) := c_0 \exp\left(c_1 \int_0^s x(t)\, dt\right) \qquad (0 \leq s \leq 1;\ c_0 > 0,\ c_1 \neq 0) \quad (3.79)$$

mit der Fréchet-Ableitung

$$(F'(x_0)h)(s) := c_1(F(x_0))(s) \int_0^s h(t)\, dt \quad (0 \leq s \leq 1;\ h \in L^2(0, 1)) \quad (3.80)$$

im Punkt $x_0 \in L^2(0,1)$. Wegen der Positivität, Stetigkeit und damit Beschränktheit der Funktion $(F(x_0))(s)$ $(0 \le s \le 1)$ (siehe Aufgabe 2.4) haben wir Äquivalenz $F'(x_0) \sim A$ im Sinne von Formel (3.78) zwischen der Fréchet-Ableitung (3.80) und dem Integraloperator A des Differentiationsproblems (siehe Formel (3.32)), von dem wir wissen, dass ein Inkorrektheitsgrad $\nu = 1$ vorliegt. Dann ist folglich $\nu = 1$ auch der im ganzen Raum $L^2(0,1)$ einheitliche Grad der Inkorrektheit von (3.61) für F aus (3.79) (siehe Formeln (3.57) und (3.58)). Der in (3.80) definierte Operator $F'(x_0)$ ist wegen Theorem 18 für alle $x_0 \in L^2(0,1)$ auch maximaler Operator im Sinne der eingeführten Halbordnung. Die Erfülltheit einer η-Bedingung sieht man wie folgt: Wir definieren zunächst

$$\psi(s) = c_1 \int_0^s (x(t) - x_0(t))\, dt,$$

erhalten

$$(F(x) - F(x_0))(s) = (F(x_0))(s)(\exp(\psi(s)) - 1)$$

und somit

$$(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))(s) = (F(x_0))(s)(\exp(\psi(s)) - 1 - \psi(s)).$$

Aus der Abschätzung

$$|\exp(\psi) - 1 - \psi| \le |\psi||\exp(\psi) - 1| \quad (\psi \in \mathbb{R})$$

folgt zunächst

$$|(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))(s)| \le |\psi(s)||(F(x) - F(x_0))(s)|$$

und daraus schließlich

$$\|F(x)-F(x_0)-F'(x_0)(x-x_0)\|_{L^2(0,1)} \le c_1\|x-x_0\|_{L^2(0,1)}\|F(x)-F(x_0)\|_{L^2(0,1)}.$$

Aber nicht jeder nichtlineare Operator führt wie F aus (3.79) auf einen in allen Punkten x_0 einheitlichen Grad der Inkorrektheit. Wie in Gorenflo/Hofmann ausführlich dargestellt wird variiert der Grad der Inkorrektheit in Abhängigkeit vom Punkt x_0 stark für den Selbstfaltungsoperator. Theorem 14 zeigt nämlich, dass für einen Faltungsoperator (3.74), der in diesem Fall die Fréchet-Ableitung bildet, schwach mäßige und starke Inkorrektheiten möglich sind, je nachdem wie glatt die Funktion x_0 ist und welches Verhalten diese Funktion an der Stelle $t = 0$ aufweist (siehe auch Aufgabe 3.6).

Übungsaufgabe 3.1 Zeigen Sie, dass für Elemente $y \notin R(a) \oplus R(A)^{\perp}$ keine Minimum-Norm-Lösungen der linearen Operatorgleichung (3.1) im Sinne der Formeln (3.4) und (3.5) existieren, also die Moore-Penrose-Inverse $A^{\dagger}$ auf diese Elemente nicht anwendbar ist. Zeigen Sie dazu, dass das Funkional $J(x) = \|Ax - y\|_Y^2$ des Defektnormquadrats für $y \notin R(a) \oplus R(A)^{\perp}$ zwar ein endliches Infimum $\inf\limits_{x \in X} J(x) > -\infty$ besitzt, jedoch für solche rechten Seiten y kein Element x_{mn} mit $J(x_{mn}) = \inf\limits_{x \in X} J(x)$ existiert.

Übungsaufgabe 3.2 Wir betrachten in Beispiel 3.1 den Fall eines unterbestimmten linearen Gleichungssystems (3.7) mit $m < n$ und rang $(A) = m$. Man finde in diesem Fall eine Darstellung der Minimum-Norm-Lösung x_{mn} von (3.7) als Gegenstück zu der für den Vollrangfall gültigen Formel (3.8).

Übungsaufgabe 3.3 Ist die Lösung $x \in L^2(0, L)$ der Integralgleichung (3.13) aus Beispiel 3.3, sofern eine solche für gegebenes $y \in L^2(0, L)$ überhaupt existiert, stets eindeutig bestimmt ?

Übungsaufgabe 3.4 Im Falle separabler unendlichdimensionaler Hilberträume X, Y und Z gelte für zwei beschränkte lineare Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(X, Z)$ die Abschätzung

$$\|Ax\|_Y \le C\|Bx\|_Z$$

für alle x aus X mit einer positiven Konstante C. Man zeige, dass die folgenden Aussagen gelten: Falls B kompakt ist, so ist auch A kompakt. wenn A und B kompakte Operatoren sind und sich die Operatorgleichung $Ax = y$ als höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$ erweist, so ist auch die Operatorgleichung $Bx = z$ höchstens inkorrekt vom Grade $\nu > 0$.

Übungsaufgabe 3.5 Welchen Grad der Inkorrektheit besitzt die Faltungsgleichung

$$\int_0^s \exp\left(-\frac{1}{s-t}\right) x(t)\, dt = y(s) \qquad (0 \le s \le 1)$$

im Raum $X = Y = L^2(0, 1)$?

Übungsaufgabe 3.6 Für welche Elemente $x_0 \in L^2(0, 1)$ erfüllt der in Formel (2.33) definierte Selbstfaltungsoperator $F : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ eine η-Bedingung (3.75) für alle x aus einer Kugel $\bar{B}_r(x_0)$ im Raum $L^2(0, 1)$ mit Mittelpunkt x_0 und Radius $r > 0$?