Lösung der Aufgabe 29 c

Bekanntlich existiert das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Nach Teil (a) der Aufgabe existiert also für positive t das uneigentliche R-Integral

$$\int_0^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx$$

Demnach gibt es zu $\epsilon > 0$ ein K, so daß

$$|\int_K^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx| < \epsilon.$$

Wir zeigen: man kann zu vorgegebenem ϵ ein K so wählen, daß diese Abschätzung für alle $0 < t \leq 1$ gilt.
Die Funktion $(1-e^{-tx})\sin x$ hat die Stammfunktion

$$f_t(x) = \frac{(e^{-tx} - (1+t^2))\cos x + e^{-tx} t \sin x}{1+t^2}$$

Für $b > a > 0$ erhält man mit partieller Integration

$$\int_a^b (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx = \frac{f_t(b)}{b} - \frac{f_t(a)}{a} + \int_a^b \frac{f_t(x)}{x^2} dx$$

Wegen $|f_t(x)| \leq 4$ für alle $x > 0$ und $t \in (0,1]$ folgt

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx = -\frac{f_t(a)}{a} + \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{f_t(x)}{x^2} dx$$

bzw.

$$|\int_a^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx| \leq \frac{4}{a} + \int_a^\infty \frac{4}{x^2} dx$$

Da das rechts stehende Integral konvergiert, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein K_0, so daß für alle $a \geq K_0$ gilt: $\int_a^\infty \frac{4}{x^2} dx < \epsilon$. Man wähle nun $K \geq K_0$ so, daß $4/K < \epsilon$. Dann gilt aber für alle $0 < t \leq 1$:

$$|\int_K^\infty (1-e^{-tx})\frac{\sin x}{x} dx| < 2\epsilon$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen eine Folge (t_n) mit $0 < t_n \leq 1$ und $\lim_n t_n = 0$. Dann wählen wir noch ein K wie oben. Auf dem Intervall $[0, K]$, konvergiert die Folge $g_n(x) := (1-e^{-t_n x})\frac{\sin x}{x}$ punktweise (sogar gleichmäßig) gegen die Nullfunktion. Also gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz oder aber nach dem Satz über majorisierte Konvergenz):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^K g_n(x) dx = 0$$

Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $0 < t < \delta$ gilt

$$|\int_0^K (1 - e^{-tx}) \frac{\sin x}{x} dx| < \epsilon,$$

so daß man für eben diese t auch die Abschätzung

$$|R - \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) \frac{\sin x}{x} dx| < 3\epsilon$$

hat. Dies aber besagt wegen

$$L - \int_{(0,\infty)} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = R - \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

gerade

$$\lim_{t \to 0^+} L - \int_{(0,\infty)} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = R - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}.$$

Teil-Lösung der Aufagbe 28

Es soll gezeigt werden, daß

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n dt, \quad x > 0$$

eine differenzierbare Funktion darstellt. Wir zeigen, daß die Funktion auf jedem Intervall (ϵ, K) differenzierbar ist.
Sei also $0 < \epsilon < x < K$, man beachte für $t \geq 1$:

$$|e^{-t} t^{x-1} (\log t)^{n+1}| \leq e^{-t} t^{N+n}$$

und für $0 < t < 1$ hat man wegen

$$\lim_{t \to 0^+} t^{x-\epsilon} (\log t)^{n+1} = 0$$

die Abschätzung

$$|t^{x-\epsilon} (\log t)^{n+1}| \leq M, \quad |t| \leq 1$$

Damit folgt

$$|e^{-t} t^{x-1} (\log t)^{n+1}| = |e^{-t} t^{x-\epsilon} t^{\epsilon-1} (\log t)^{n+1}| \leq M t^{\epsilon-1}$$

Setzt man nun

$$F(t) := M t^{\epsilon-1} \text{ für } t \in (0,1) \text{ bzw. } = e^{-t} t^{N+n} \text{ für } t \geq 1,$$

so hat man die gesuchte integrierbare Majorante gefunden.