Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/04/AnalysisIII

Musterlösung Aufgabe 25

(a) Für $x, y \in]-1,1[$ gilt $(1+xy)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(xy)^k$.
Man fixiere $0 < y < 1$ und betrachte die -bzgl. der Variablen x- offensichtlich integrierbare Folge $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(xy)^k$, für die bei $|x| < 1$ stets

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |y|^k = \frac{1}{1-y} := F(x)$$

bleibt. Da F eine integrierbare Majorante darstellt darf mit dem Satz von Lebesgue auf

$$\int_{-1}^{1} (1+xy)^{-1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x) dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} y^{2k} \frac{2}{2k+1}$$

geschlossen werden.
Ist nun $0 \leq y < 1$ beliebig, so ist $g_n(y) := \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} y^{2k}$ offenbar eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, für die ihre Integralfolge beschränkt bleibt:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} y^{2k} dy \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 < \infty.$$

Der Satz von Levi vollendet den Beweis von (a), denn $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{22k+1} y^{2k}$ ist integrierbar und

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} y^{2k} dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} \int_0^1 y^{2k} dy = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2.$$

(b) Die Funktion $u :]-1,1[\to]-1,1[; x \mapsto x + \frac{1}{2} y(x^2-1)$ ist sinnvoll, surjektiv, differenzierbar und wegen $u'(x) = 1 + yx > 0$ für $0 < y < 1$ streng monoton wachsend, also injektiv und damit ein Diffeomorphismus. Wegen $2uy = 2xy + y^2x^2 - y^2$ schliesst man mit der Transformationsfolge auf

$$\int_0^1 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+xy} dy = \int_0^1 \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+2uy+y^2} dy.$$

Nun seien zwei Optionen erwähnt, die das Vertauschen der Integrationsreihenfolge rechtfertigen:

1.) Satz von Fubini für halbstetige Funktionen (Satz 36.12); die Funktion

$$f :]-1,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}; (u,y) \mapsto (1+2uy+y^2)^{-1}$$

kann halbstetig von unten auf den $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden, denn $1+2uy+y^2 = (y+u)^2 + (1-u^2) > 0$. Damit ist $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^2)$ und der besagte Satz von Fubini steht zur Verwendung bereit.

2.) Man zeige, dass $g(x,y) := (1+xy)^{-1}\chi_{]-1,1[\times]0,1[}$ integrierbar ist und verwende den allgemeinen Satz von Fubini (Satz 39.12); zur Durchführung dieses Programms hat man nach (a) bereits

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \left|\frac{1}{1+xy}\right| dxdy < \infty$$

und daraus folgt die lokale Integrierbarkeit von g. Nach Definition von g folgt schon $\int_0^1 \int_{-1}^1 |g| dxdy < \infty$ und nach dem Satz von Tonelli (UE) die Integrierbarkeit.

Eine Rechnung führt zu

$$P = \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right\} du.$$

Das Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ ist uneigentlich, wegen

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right| du \leq \frac{\pi}{2} \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{-1+\epsilon_2}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} < \infty$$

konvergiert es allerdings absolut. Da der Integrand ungerade ist, verschwindet es und man erhält die Behauptung.

(c) Die Substitution $u(\phi) := -\cos 2\phi, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ kann wie in (b) begründet werden. Wegen

$$\frac{1-\cos 2\phi}{\sqrt{1-\cos^2 2\phi}} = \frac{1-\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \tan \phi$$

kommt

$$P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctan \tan \phi d\phi = \frac{\pi^2}{4}.$$

(d) Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut- man darf daher umordnen:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2},$$

folglich $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
Ein Umstellen rechtfertigt den Ausruf: Fertig!