Technische Universität Berlin WS 03/04
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3`

1.Übung „Analysis III “

1.) Vorgegeben seien die Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, \quad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

(a) Zeigen Sie: F und G sind differenzierbar und es gilt:

$$F' + G' = 0, \quad F + G = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Berechnen Sie mit (a) den Wert des Fehlerintegrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$

Begründen Sie jeden Schritt in welchem Sie eine Limesvertauschung durchführen.

3+1 Punkte

2.) Vorgegeben sei die Abbildung $\mu : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, f \mapsto \mu(f) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x)$.
Zeigen Sie, dass die Abbildungsvorschrift sinnvoll ist und untersuchen Sie μ auf Linearität, Monotonie und Translationsinvarianz.

4 Punkte

3.) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter sei

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ 0 & , sonst. \end{cases}.$$

Zeigen Sie: $g \in C_c(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \partial A : f(x) = 0.$

4 Punkte

4.) Es sei $Q := [0,1]^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^3 - x^2)(y-1)\sin xy & , (x,y) \in Q \\ 0 & , sonst. \end{cases}.$$

Zeigen Sie: $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ und berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dxdy$. **4 Punkte**

Abgabe: 10. 11. 03, in der Übung.