Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

11.Übung „Analysis III “

(Das letzte Blatt der zweiten Übungsserie)

33.) Es sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine k-dimensionale und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie: $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k+l$.

4 Punkte

34.) Vorgegeben sei

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = r^2, \quad x^2 - rx + y^2 \leq 0\}, \quad r > 0$$

Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie das zweidimensionale Volumen von V.

4 Punkte

35.) Berechnen Sie das zweidimensionale Volumen des Torus T^2 aus Aufgabe 32 und bestimmen Sie zu $a \in T^2$ den Tangentialraum T_aT^2, sowie den äusseren Normalen- Einheitsvektor $\nu(a)$ von T^2 in a.

4 Punkte

36.) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A_k \subset U, k \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge $A_k \subset A_{k-1}, k \in \mathbb{N}$ von Kompakta mit glattem Rand, für die $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{x_0\}$ gelten möge. Weiter sei $\nu_k : A_k \to \mathbb{R}^n$ das äussere Normalen- Einheitsvektorfeld von A_k und $v : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U. Zeigen Sie:

$$\text{div } v(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{Vol_n(A_k)} \int_{\partial A_k} < v, \nu > dS$$

und veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis.

4 Punkte

Abgabe: 9.2. 04, in der Übung.