Technische Universität Berlin WS 03/04

Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

2.Übung „Analysis III “

5.) (a) Konstruieren Sie mit der C^∞- Funktion $\Phi(t) := \exp\left(-(1-t^2)^{-1}\right), |t| < 1$ und $\Phi(t) := 0, |t| \geq 1$ eine Funktion $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, welche bei $\alpha > 0$ auf $|x| \leq \frac{1}{2}\alpha$ identisch 1, auf $|x| \geq \alpha$ identisch 0 ist und sonst nur Werte aus dem Intervall $[0,1]$ annimmt.

(Tip. Betrachten Sie für $\alpha = 1$ die Funktion $g(x) = e\Phi(e^{\frac{4}{3}}\Phi(x))$. „Verschieben und drehen“ Sie g dann so, dass man den gewünschten Fall erhält. Für die allgemeine Aufgabe ist der Parameter α noch einzubauen. Dies ist eine Bastelaufgabe.)

(b) Lösen Sie mit dem Faltungsprodukt folgende allgemeinere Aufgabe:
Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte, $B \subset G$ eine kompakte Menge. Dann existiert eine Funktion $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} g \subset G, \quad 0 \leq g \leq 1$ und $g|_B \equiv 1$.

(Tip. Man kann dist $(\complement G, B) =: 3\alpha > 0$ annehmen (Warum?). Konstruieren Sie zunächst eine stetige Funktion f mit $0 \leq f \leq 1$, sowie $f(x) = 1$ für dist $(\complement G, x) \geq 2\alpha$ und $f(x) = 0$ für dist $(\complement G, x) \leq \alpha$. Benutzen Sie $d(x) := \operatorname{dist}(x, \complement G)$.)

(c) Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $B \subset G$ kompakt und $f \in C(G)$. Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $\hat{f} \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{f}|_B = f$.

(Tip. Verwenden Sie (b).)

3+4+2 Punkte

6.) Beweisen Sie mit dem Faltungsprodukt folgenden Approximationssatz: Es sei $f \in C^m(\mathbb{R}^n), 0 \leq m < \infty$ Dann existiert zu $\epsilon > 0$ eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $|D^q f(x) - D^q g(x)| < \epsilon$ für alle $|q| \leq m$ (Multiindexschreibweise!) und $x \in \mathbb{R}^n$.
Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Beweisen Sie die Aussage für $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$.

(b) Führen Sie den allgemeinen Fall mit der Teilung der Eins $\alpha_{p,1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), p \in \mathbb{Z}^n$ aus der Vorlesung bzw. Forster: Analysis 3, Paragraf 3 auf (a) zurück.

3+4 Punkte

Abgabe: 17.11.03, in der Übung.