Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

3.Übung „Analysis III "

7.) Vorgegeben sei

$$f : K_1(0)\backslash([0,1[\times\{0\}) \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto \frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{1}{2}$$

Zeigen Sie: f kann zu einer Funktion $\hat{f} \in C_c(V)$ mit $V := \mathbb{R}^2\backslash([0,\infty[\times\{0\})$ fortgesetzt werden. Berechnen Sie $\int\limits_V \hat{f}(x,y)dxdy$.

4 Punkte

8.) Beweisen Sie folgendes Injektivitätskriterium:
Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, d.h. für je zwei Punkte $a, b \in X$ möge die Verbindungsstrecke $\{a+\lambda(b-a)|0 \leq \lambda \leq 1\}$ in X liegen. Weiter sei $t : X \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und für alle $c \in X$ sei die Jacobi-Matrix $Dt(c)$ positiv definit. Dann ist t in X injektiv.

(Tip. Für $n = 1$ ist nach dem Mittelwertsatz $t(b)-t(a) = t'(a+\lambda_0(b-a))(b-a)$ mit geeignetem $\lambda_0 \in]0,1[$ und falls $t' > 0$ ist kann man sofort auf Injektivität schliessen. Wie lässt sich dieser Ansatz verallgemeinern?) **3 Punkte**

9.) Vorgegeben sei die Transformation der ebenen elliptischen Koordinaten

$$(u,v) \mapsto (x,y), \qquad \begin{array}{l} x = \sin u \cosh v \\ y = \cos u \sinh v \end{array}$$

(a) Beschreiben Sie das Verhalten der Transformation bei festem u bzw. v mittels Skizzen und geben Sie einen möglichst grossen injektiven Bereich der (u,v)- Ebene an. (Aufgabe 8 kann helfen.)

(b) Drücken Sie den Laplace Operator in (u,v)- Koordinaten aus.

4 + 5 Punkte

Abgabe: 24.11.03, in der Übung.