Technische Universität Berlin WS 03/04
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3`

4.Übung „Analysis III “

10.) (a) Eine Familie $\mathfrak{F}$ reellwertiger Funktionen $f : A \to \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}^n$ heisst gleichmässig beschränkt, falls ein $M > 0$ existiert, so dass für alle $f \in \mathfrak{F}$ gilt: $\sup_{x\in A} |f(x)| < M$.
Geben Sie ein Beispiel einer gleichmässig beschränkten Familie stetiger Funktionen, für welche die obere Einhüllende nicht stetig ist.

(b) Analog zur oberen Einhüllenden erklärt man für eine Familie $\mathfrak{F}$ die untere Einhüllende durch $f(x) := \inf_{g\in\mathfrak{F}} g(x)$.
Ist die untere Einhüllende einer Familie stetiger Funktionen nach unten halbstetig?

2 + 2 Punkte

11.) (a) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von unten halbstetig, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend.
Zeigen Sie: $g \circ f$ ist von unten halbstetig.

(b) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass man auf die Halbstetigkeit nach unten von $g \circ f$ aus (a) nicht schliessen kann, falls g nur stetig oder auch nur monoton wachsend ist.

3 + 4 Punkte

12.) Prüfen Sie, welche der folgenden Funktionen Elemente von $\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ sind, und berechnen Sie ggf. das Integral.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \chi_{\mathbb{N}}(x)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \begin{cases} (x+y)e^{x+y} & , (x, y) \in]0, 2[\times]1, 2[\\ 0 & , sonst. \end{cases}$

2 + 3 Punkte

Abgabe: 1.12.03, in der Übung.