

5. Übung „Analysis III“

- 13.) Der Kreiszyylinder $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ bohrt aus der Kugel $K_{2R}(0)$ einen Körper $K := Z \cap K_{2R}(0)$ aus. Berechnen Sie das Volumen von K .

5 Punkte

- 14.) Skizzieren Sie die Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x \geq 0\}$$

und berechnen Sie $\text{Vol}_3(A)$.

(Tip: Was waren Kardioide?)

5 Punkte

- 15.) (a) Beweisen Sie die Leibnizsche Sektorformel:

Es sei $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für den von den Strahlen $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ und der Funktion $r = f(\phi)$ in Polarkoordinaten begrenzte Sektor: $S_{\alpha, \beta, f} := \{(r, \phi) \mid r \leq f(\phi), 0 \leq \alpha < \phi < \beta < 2\pi\}$:

$$\text{Vol}_2(S_{\alpha, \beta, f}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\phi) d\phi.$$

Fertigen Sie eine Skizze von $S_{\alpha, \beta, f}$ an.

- (b) Berechnen Sie mit (a) das Volumen des von der sog. Lemniskarte $(x^2 + y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)$ begrenzten, beschränkten Bereichs. Fertigen Sie eine Skizze an.

3 + 3 Punkte

Abgabe: 8.12.03, in der Übung.