Technische Universität Berlin WS 03/04
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

6.Übung „Analysis III “

(Das letzte Blatt der ersten Übungsserie)

16.) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar und $f : A \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.
Zeigen Sie:

$$|\int_A f(x)dx| \leq \mathrm{Vol}_n(A) \cdot \sup_{x\in A} |f(x)|$$

3 Punkte

17.) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ möge Lebesgue- integrierbar sein. Weiter setzt man

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}; F(x) := \int_a^x f(t)dt := \int_{[a,x]} f(t)dt.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion F ist stetig.
(Tip. Forster §6 Satz 3.)

(b) Ist f in $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt: $F'(x_0) = f(x_0)$.
(Tip. Wie der Beweis für Riemann- Integrale, Aufgabe 16)

(c) Ist f stetig in $[a,b]$, so stimmt das Riemann- Integral von f über $[a,b]$ mit dem enstprechenden Lebesgue Integral überein.

3 + 2 + 1 Punkte

18.) Es sei X ein pseudometrischer (oder topologischer) Raum. Eine Menge $A \subset X$ heisst dicht in X, falls $\bar{A} = X$, dabei bedeutet $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A. Eine Menge heisst nirgends dicht in X, falls $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$. Eine Menge $M \subset X$ heisst mager (oder von erster Kategorie) in X, falls eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen $M_n \subset X$ existieren mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.

Bitte wenden!

(a) Begründen Sie, welche der folgenden Mengen dicht oder nirgends dicht in X liegen:

   (i) $X = (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_1})$ und $A = C_c(\mathbb{R}^n), \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

   (ii) $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ und $A = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}, \mathbb{Q}^n, \mathbb{Z}^n$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind mager in X?

   (i) $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $M = \mathbb{Q}$.

   (ii) $X = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ und $M = \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie: Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

(d) Zeigen Sie: Die abzählbare Vereinigung magerer Mengen ist mager.

3 + 2 + 1 + 1 Punkte

Abgabe: 15.12.03, in der Übung.