Technische Universität Berlin WS 03/04
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

7.Übung „Analysis III “

19.) Es sei $A \subset \mathbb{R}^k$ eine Nullmenge und $B \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie: $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$ ist eine Nullmenge.

3 Punkte

21.) Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue integrierbar , wenn $|f|$ über $[a, \infty[$ uneigentlich Riemann integrierbar ist. (Tip. Verwenden Sie Aufgabe 17 und z.B. § 4 Satz 2.)

4 Punkte

21.) Berechnen Sie:

$$\int_{0 \leq \|x\|_2 \leq 1} e^{-\|x\|_2^2} d^4x.$$

3 Punkte

22.) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 f(x^k) dx = f(0).$$

2 Punkte

23.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Existiert eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, für die

(a) f nicht Riemann integrierbar ist, wohl aber $|f|$,

(b) f nicht Lebesgue integrierbar ist, wohl aber $|f|$?

2 + 2 Punkte

24.) **Zusatzaufgabe.** Konstruieren Sie eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass die Menge M der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden und so, dass für jedes Teilintervall $J \subset [0,1]$ mit $\overset{\circ}{J} \neq \emptyset$ der Durchschnitt $M \cap J$ überabzählbar ist. (Tip. Es sei C_1 das Cantorsche Diskontinuum (C. D.). Für jedes der offenen Intervalle von $[0,1] \backslash C_1$ bilde man das entsprechende C. D. . Es sei C_2 die Vereinigungsmenge der entsprechenden Diskontinua. Fährt man induktiv fort, so erhält man eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunkter Mengen. Man setze $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ Konstruieren Sie auf $[0,1]$ eine Funktion, die auf D ihre Unstetigkeitsstellen hat, sonst aber stetig ist. Für die Unstetigkeit ist ein nach Baire benannter Satz über magere Mengen hilfreich. z.B. Werner: Funktionalanalysis Springer Verlag)

16 Sonderpunkte

Abgabe: 12.1.04, in der Übung.