Technische Universität Berlin WS 03/04

Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

8.Übung „Analysis III “

25.) Vorgegeben sei das Integral: $P := \int_0^1 (\int_{-1}^1 (1+xy)^{-1} dx) dy$.

(a) Zeigen Sie durch Entwicklung des Integranden in eine geometrische Reihe: $P = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
(Tip. Verwenden Sie geeignete Konvergenzsätze zur Vertauschung von Integration und Summation.)

(b) Nun soll $u = u(x) := x + \frac{1}{2}y(x^2-1)$ substituiert und die Integrationsreihenfolge vertauscht werden. Begründen Sie, weswegen dies möglich ist und schliessen Sie auf

$$P = \int_{-1}^{1} (\int_0^1 \frac{dy}{1+2uy+y^2}) du = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} du$$

(c) Das letzte Integral in (b) kann mittels der Substitution $u = -\cos 2\phi$ geknackt werden. Berechnen Sie den Wert von P.

(d) Zeigen Sie mittels Reihenmanipulation $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3 + 4 + 2 + 1 Punkte

26.) Für $n \geq 1$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{n^2} \exp\left(-\frac{x}{n}\right) & x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Begründen Sie, weswegen $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ ist, und zeigen Sie mit den Konvergenzsätzen, dass die Folge weder monoton fallend ist, noch eine konvergente Majorante besitzen kann.

2 Punkte

27.) Beweisen Sie folgende Version des Fatouschen Lemmas:
Es sei $f_\nu \in \mathcal{F}_+(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge, für die ein $M > 0$ existiert, so dass für alle $\nu \in \mathbb{N}$ stets $\int_{\mathbb{R}^n} f_\nu dx \leq M < \infty$ bleibt. Dann gilt $\liminf_{\nu\to\infty} f_\nu(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{\nu\to\infty} f_\nu dx \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu dx.$$

(Tip. Setzen Sie $g_\mu := \inf_{\nu\geq\mu} f_\nu$ und zeigen Sie zunächst die Integrierbarkeit der g_μ.)

4 Punkte

Abgabe: 19.1.04, in der Übung.