Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof.Dr. G. Frank / J. Meyer
Sekr. MA 8-2
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS03/Analysis3

9.Übung „Analysis III “

In den beiden folgenden Aufgaben sind bei der Vertauschung von Grenzprozessen genaue Begründungen anzugeben! Andernfalls droht **massiver** Punktabzug!

28.) (a) Zeigen Sie, dass die Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \quad x > 0$ beliebig oft differenzierbar ist mit

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\ln t)^n dt.$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe einer Differentiation unter dem Integralzeichen in der Gleichung

$$k^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-kt}dt \quad , x, k > 0$$

die Funktionalgleichung der Gammafunktion: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$.

3 + 3 Punkte

29.) Vorgegeben sei die Funktion

$$f(t) := L - \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx \quad , t > 0.$$

(a) Begründen Sie, weswegen f sinnvoll erklärt ist.

(b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung explizit. Folgern Sie: $f(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

(c) Nun wird $f(0) := R - \int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$ gesetzt - dieses Integral existiert nicht im Lebesgueschen Sinn! Zeigen Sie, dass dadurch f in 0 rechtsseitig stetig fortgesetzt wird.

(d) Berechnen Sie nun den Wert des Intergals $R - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

1 + 4 + 4 + 1 Punkte

Abgabe: 26.1.04 in der Übung.