Musterlösung zu Aufgabe 6

Teil 6.(a):

Sei $f \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Wie in der Übung gezeigt, gilt dann:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \alpha > 0 : \| f - f_\delta \| < \epsilon \qquad \forall\ 0 < \delta \leq \alpha, \tag{1}$$

wobei $f_\delta := f \star \Phi^\delta$ (zur Definition von Φ^δ vgl. Übung) sei. Insb. gilt bei Wahl dieser Funktion Φ^δ, dass $f_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist.

Für $m = 0$ folgt damit die Behauptung mit $g := f_\delta$.

Sei nun $m > 0$ und $|q| \leq m$, dann gilt

$$f \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^q f \in \mathcal{C}_c^{m-|q|}(\mathbb{R}^n).$$

Damit ist die Aussage (1) auch auf $D^q f$ anwendbar und man erhält für **festes** q:

$$\exists\ \alpha_q > 0 : \| D^q f - (D^q f)_\delta \| < \epsilon \qquad \forall\ 0 < \delta \leq \alpha_q.$$

Weitere Umformungen liefern mit den Sätzen aus der Übung

$$\| D^q f - (D^q f)_\delta \| = \| D^q f - (D^q f) \star \Phi^\delta \| = \| D^q f - D^q(f \star \Phi^\delta) \| = \| D^q f - D^q f_\delta \|,$$

so dass sich zusammenfassend

$$\| D^q f - D^q f_\delta \| < \epsilon \qquad \forall\ 0 < \delta \leq \alpha_q$$

ergibt. Wählt man nun $\delta := \min\limits_{|q| \leq m} \delta_q$ ($\delta > 0$, da Minimum nur über endlich viele q gebildet wird) und $g := f_\delta$, so ist **für alle** $|q| \leq m$

$$\| D^q f - D^q g \| < \epsilon$$

wie behauptet. q.e.d.

Teil 6.(b):

Wähle $\alpha_{p,1} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p \in \mathbb{Z}^n$ wie in der Vorlesung.
Sei nun $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(x)\alpha_{p,1}(x) \text{ bzw. } f = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f\alpha_{p,1},$$

wobei für jedes x höchstens 3^n der Summanden von Null verschieden sind. Weiterhin gilt $f\alpha_{p,1} \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R}^n)$, da

$$supp(\alpha_{p,1}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_\nu - p_\nu| \leq 1 \text{ für } \nu = 1, ..., n\}$$

kompakt ist. Diese Funktionen $f\alpha_{p,1}$ werden nun mit Teil a) approximiert, d.h. setze $g_p := (f\alpha_{p,1}) \star \Phi_{\delta_p} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, wobei $\delta_p > 0$ gemäß Teil a) existiert, so dass für alle $|q| \leq m$:

$$\| D^q(f\alpha_{p,1}) - D^q(g_p) \| < \epsilon$$

gilt. Setze nun

$$g(x) := \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} g_p(x). \tag{2}$$

Da für jedes x in der Reihe effektiv nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind, steht in der letzten Gleichung immer etwas Sinnvolles.

$$supp(g_p) = supp((f\alpha_{p,1}) \star \Phi_{\delta_p}) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, supp(f\alpha_{p,1})) \leq \delta_p\}$$

(vgl. Übung) und da $supp(f\alpha_{p,1}) \subseteq supp(\alpha_{p,1})$ ist demzufolge

$$\begin{aligned} supp(g_p) &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, supp(\alpha_{p,1})) \leq \delta_p\} \\ &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x_\nu - p_\nu| \leq 1 + \delta_p \text{ für } \nu = 1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Insbesondere existieren für jedes x höchstens endlich viele Summanden in (2), die ungleich Null sind. Ausserdem findet man eine absolute obere Schranke, etwa M, die die Anzahl der an der Summe beteiligten Summanden für alle x majorisiert.
Weiterhin ist $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, da die $g_p \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind und für jedes x die Summe in einer Umgebung von x endlich ist.
Es ergibt sich abschließend

$$|(D^q f)(x) - (D^q g)(x)| = |D^q(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f\alpha_{p1})(x) - D^q(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} g_p)(x)|$$

und da für alle x die Summen in einer Umgebung endlich sind

$$\begin{aligned} |(D^q f)(x) - (D^q g)(x)| &= |D^q(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f\alpha_{p,1}(x)) - D^q(\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} g_p(x))| \\ &= |\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} D^q(f\alpha_{p,1})(x) - \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} D^q(g_p)(x)| \\ &\leq \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} |D^q(f\alpha_{p,1})(x) - \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} D^q(g_p)(x)| \\ &\leq (3^n + M) \| D^q(f\alpha_{p1}) - D^q(g_p) \| < (3^n + M)\epsilon, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Ungleichung daraus folgt, dass für jedes x zum einen $D^q(f\alpha_{p,1})(x)$ für höchstens 3^n p's ungleich Null ist und zum anderen $D^q(g_p)(x)$ für höchstens M p's ungleich Null ist. q.e.d.