Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

6. Übungsblatt

Abgabe am 9.12.2004

Aufgabe 21: **4 Punkte**

Für einen randomisierten Algorithmus $\mathcal{A}$ gebe die Zufallsvariable X die Laufzeit von $\mathcal{A}$ an. Für $c \in \mathbb{N}$, $c > 1$ sei $\mathcal{A}_c$ der „Neustart-Algorithmus“: $\mathcal{A}_c$ führt $\mathcal{A}$ aus und startet jeweils nach der Zeit $cE(X)$ neu, falls $\mathcal{A}$ noch nicht fertig ist.

a) Zeige, dass die erwartete Laufzeit von $\mathcal{A}_c$ höchstens $cE(X)$ ist.

b) Es sei $d > c$. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der $\mathcal{A}_c$ frühestens nach der Zeit $dE(X)$ fertig wird, höchstens $\frac{1}{c^{\lfloor d/c \rfloor}}$ ist.

c) Wir wollen nun die in Teil b) beschriebene Wahrscheinlichkeit nach oben durch $\frac{1}{1000}$ beschränken. Wie groß muss d für $c = 2$ sein, damit man diese Schranke aus b) bekommt? Wie sollte man c am geeignetsten wählen, um eine Aussage für ein möglichst kleines d zu machen?

Aufgabe 22: **4 Punkte**

Wie entscheidet man in einem kD-Baum, ob ein zu einem Blatt gehöriges Gebiet unbeschränkt oder beschränkt ist? Gib ein Kriterium zum Entscheiden dieser Frage an.

Aufgabe 23: **4 Punkte**

Gegeben ist ein Rechteck $R : [x, x'] \times [y, y']$ in der Ebene.

a) Sei $\mathcal{R}$ eine Menge von n Achsen-parallelen Rechtecken in der Ebene. Die Frage ist nun: Welche Rechtecke aus $\mathcal{R}$ sind ganz in R enthalten?
Beschreibe eine Datenstruktur, die $O(n \log^3 n)$ Speicher braucht und diese Frage in Zeit $O(\log^4 n + k)$ beantworten kann, wobei k die Anzahl der zurückgegebenen Rechtecke aus $\mathcal{R}$ ist.

b) Sei nun $\mathcal{P}$ eine Menge von n Polygonen in der Ebene. Die analoge Frage ist natürlich: Welche Polygone aus $\mathcal{P}$ sind ganz in R enthalten?
Beschreibe wieder eine Datenstruktur, die $O(n \log^3 n)$ Speicher und $O(\log^4 n + k)$ Zeit zur Antwort benötigt, wobei nun k die Anzahl der zurückgegebenen Polygone ist.

Aufgabe 24: **4 Punkte**

P sei ein Polygon, gegeben in Form eines Arrays, welches die n Ecken des Randes sortiert enthält. Desweiteren sei $q = (q_1, q_2)$ ein Anfragepunkt in $\mathbb{R}^2$.

a) Der folgende Algorithmus soll entscheiden, ob q in P liegt oder nicht: Betrachte den Strahl $r := \{(q_1 + \lambda, q_2) : \lambda \geq 0\}$ (also den bei q startenden horizontalen Strahl nach rechts). Bestimme für jede Kante e von P, ob sie r schneidet. Falls die Anzahl der r schneidenden Kanten ungerade ist, so liegt q in P, andernfalls liegt q nicht in P.
Zeige, dass der Algorithmus korrekt ist. Wie soll verfahren werden, falls r eine Ecke von P trifft? Wie ist die Laufzeit des Algorithmus?

b) Gib einen Algorithmus an, der für konvexes P in $\mathrm{O}(\log n)$ Zeit entscheidet, ob q in P liegt. Wie kann dieser Algorithmus verallgemeinert werden, falls P sternförmig bezüglich p ist, bzw. falls P y-monoton ist?