Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

9. Übungsblatt

Abgabe am 13.1.2005

Aufgabe 31: **4 Punkte**

Für zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$,

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad q = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

definiere die *Manhattan-Metrik*

$$d_1(p,q) \;=\; |p_x - q_x| + |p_y - q_y|\,,$$

sowie die *Maximumsmetrik*

$$d_\infty(p,q) \;=\; \max\{|p_x - q_x|, |p_y - q_y|\}\;.$$

a) Für eine Metrik d und Punkte p, q ist der Bisektor $\mathcal{B}_d(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(p,x) = d(x,q)\}$ definiert. Skizziere alle Fälle von Bisektoren, die bei den Metriken d_1 und d_∞ auftreten können.

b) Zeichne das Voronoi-Diagramm der Punktmenge

$$P \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich der Metriken d_1, d_2 und d_∞. Dabei ist

$$d_2(p,q) \;=\; \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2}$$

die euklidische Metrik in der Ebene.

Aufgabe 32: **4 Punkte**

a) Gegeben sei eine Menge S von n Punkten in der Ebene und dessen Voronoi Diagramm $V(S)$ (als DCEL). (Zu jedem Punkt ist also bekannt, in welchem Gebiet er liegt.)
Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ an, der zwei Punkte $p, q \in S$ mit $p \neq q$ berechnet, die minimalen Abstand haben.

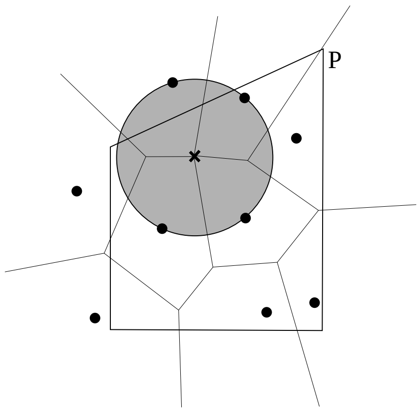
b) Zeige eine untere Schranke von $\Omega(n \log n)$ für das Berechnen eines Voronoi-Diagramms als DCEL.

Aufgabe 33: **4 Punkte**

Zeige, dass die Knickstellen der beach line bei der Berechnung eines Voronoi-Diagramms mittels sweep gerade den Kanten des Voronoi-Diagramms entsprechen.

Aufgabe 34 *(Problem des größten leeren Kreises)*: **4 Punkte**

Herr V. möchte ein Haus bauen, und zwar innerhalb eines konvexen polygonalen Gebietes P mit m Ecken. Er will jedoch möglichst weit entfernt von den Kernkraftwerken der Region wohnen, deren Positionen durch die n Punkte der Menge S gegeben sind. Daher sucht er den größten Kreis $K(x)$ mit Mittelpunkt x in P, der keinen Punkt von S im Inneren hat.



a) Zeige, dass der Mittelpunkt x von $K(x)$ entweder ein Eckpunkt von P, ein Knoten des Voronoi-Diagramms oder der Schnittpunkt einer Kante des Voronoi-Diagramms mit dem Rand von P ist.

b) Sei $V(S)$ das Voronoi-Diagramm von S, gegeben als DCEL. Gib einen Algorithmus an, der alle Schnittpunkte des Randes von P mit $V(S)$ in $O(m+n)$ Zeit berechnet.

c) Gib einen Algorithmus an, der das Problem des größten leeren Kreises in $O((m+n)\log n)$ Zeit löst.