Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

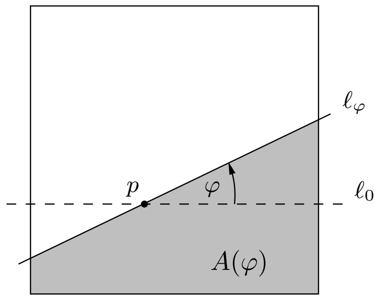
Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

10. Übungsblatt

Abgabe am 20.1.2005

Aufgabe 35: **4 Punkte**

Gegeben sei ein Punkt p im Einheitsquadrat $D := [0,1] \times [0,1]$. ℓ_0 sei die Gerade durch p, parallel zur x-Achse. Wir interessieren uns für die Funktion $A : [0, 2\pi] \mapsto [0,1]$, die folgendermaßen definiert ist: für $0 \le \varphi \le 2\pi$ sei ℓ_φ die Gerade, die man aus ℓ_0 durch Rotation um p um den Winkel φ erhält; $A(\varphi)$ sei der Flächeninhalt des von der Halbebenen rechts von ℓ_φ ausgeschnittenen Flächenstücks von D.



a) Berechne für den Punkt $p = (\frac{2}{5}, \frac{1}{4})$ die Funktion A_p und skizziere sie.

b) Zeige, dass für beliebiges $p \in D$ die Funktion A_p höchstens 4 echte Extrema hat; dabei ist ein *echtes Extremum* einer Funktion f ein Extremum x mit der Eigenschaft, dass in jeder Umgebung von x mindestens ein x' mit $f(x') \neq f(x)$ liegt.

c) Beschreibe die Punkte p mit der Eigenschaft, dass A_p

i) gar keine bzw. ii) genau 4

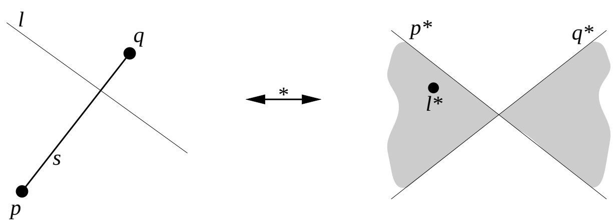
echte(n) Extrema hat.

Aufgabe 36: **4 Punkte**

Die Dualabbildung „*“ war folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
{}^* : \quad & \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} & \mapsto \quad & \vec{p}^* = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = p_x x - p_y\} \\
{}^* : \quad & \ell = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y = mx + b\} & \mapsto \quad & \ell^* = \begin{pmatrix} m \\ -b \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Dabei sind $p_x, p_y, m, b \in \mathbb{R}$. Eine Strecke wird unter dieser Abbildung zu einem Doppelkeil (bzw. zu einem Streifen):



a) Wie liegen die Bilder von Punkten unter „*“, welche innerhalb eines gegebenen Dreiecks mit den Ecken p, q und r liegen?

b) Welche Objekte in der Ebene werden mit „*“ auf einen nach oben und unten geöffneten Doppelkeil (bis auf die vertikale Gerade durch den Schnittpunkt) abgebildet?

Aufgabe 37: **4 Punkte**

Sei S eine Menge von n Strecken in der Ebene. Gib einen Algorithmus an, der entscheidet, ob es eine Gerade ℓ gibt, die alle Strecken in S schneidet („Berühren“ wird als „Schneiden“ angesehen). Eine solche Gerade (falls sie existiert) heißt *Transversale*. Der Algorithmus sollte in höchstens quadratischer Zeit laufen.

Aufgabe 38: **4 Punkte**

Sei L eine Menge von n Geraden in der Ebene. Gib einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der ein achsenparalleles Rechteck berechnet, welches alle Ecken des Arrangements $\mathcal{A}(L)$ im Inneren enthält. (*Zusatzfrage:* Gibt es einen Algorithmus, der dieses Problem in $o(n \log n)$ Zeit löst?)

Programmieraufgabe 4: **Abgabe bis 27.1.2005**

Schreibe (mit CGAL) eine Funktion `discrepancy`, welche eine Liste von Punkten im Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ übergeben bekommt und die Diskrepanz dieser Punktemenge zurückliefert.

Auf der homepage der Vorlesung gibt es wieder ein Qt-Programm, das Punktmengen anzeigt, einliest und abspeichert. Berechne damit die Diskrepanz der verschiedenen Punktmengen auf der homepage und versuche, weitere Punktmengen zu finden, die geringere Diskrepanz als das regelmäßige Gitter, also kleiner als $1/\sqrt{n}$, haben.