Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Axel Werner

Wintersemester 2004/2005
Algorithmische Geometrie

12. Übungsblatt

Abgabe am 3.2.2005

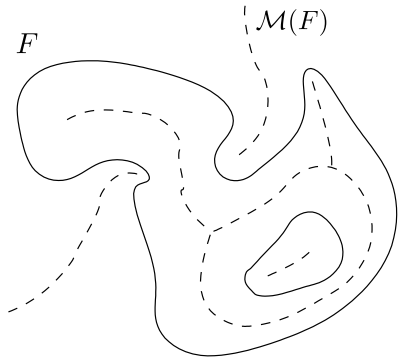
Aufgabe 43: **12 Punkte**

Es sei F die Vereinigung von disjunkten, geschlossenen Kurven in der Ebene. Weiterhin sei eine endliche Menge $S \subset F$ gegeben (die Stützpunkte oder *sample points*). Ziel ist es, Polygone mit den Punkten aus S als Ecken zu konstruieren, die F annähern.

Im Folgenden sei stets $B_\rho(p)$ die abgeschlossene (euklidische) Kreisscheibe mit Radius ρ um den Mittelpunkt p und $\operatorname{int} M$ sei das Innere der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

Die *mediale Achse* $\mathcal{M}(F)$ von F ist der (topologische) Abschluss der Menge aller Punkte der Ebene, für welche der minimale Abstand zu F in mindestens zwei Punkten von F angenommen wird, also der Menge

$$\Big\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \begin{array}{l} \operatorname{int} B_{d(x,F)}(x) \cap F = \emptyset \text{ und} \\ \exists\, p, q \in F : p \neq q, B_{d(x,F)}(x) \cap F \ni \{p, q\} \end{array} \Big\}.$$



a) Es sei B eine Kreisscheibe, die mindestens zwei Punkte von F enthält. Beweise, dass dann $B \cap F$ homöomorph zu einem 1-Ball (also zu einem Liniensegment) oder $B \cap \mathcal{M}(F) \neq \emptyset$ ist.

Den Abstand eines Punktes $p \in F$ zur medialen Achse bezeichnen wir mit $\mathrm{LFS}(p)$ (die *local feature size*). Und schließlich heißt für $r > 0$ die Menge S ein r-*sample*, falls für jedes $p \in F$ ein $s \in S$ existiert mit $d(p, s) \leq r \cdot \mathrm{LFS}(p)$ (falls also ein Punkt p auf der Kurve immer höchstens Abstand $r \cdot \mathrm{LFS}(p)$ von irgendeinem Stützpunkt hat).

b) Sei $r < 1$ und S ein r-sample von F. Beweise: für zwei beliebige, auf F benachbarte Stützpunkte $s_1, s_2 \in S$ existiert eine Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $p \in F$ und s_1, s_2 auf dem Rand von B, so dass $\operatorname{int} B$ keine Punkte aus S enthählt.

c) Sei wieder $r < 1$ und S ein r-sample von F. Zeige, dass die Delaunay-Unterteilung eine Kante zwischen je zwei benachbarten Stützpunkten enthält.

d) Gib einen Algorithmus an, der die gesuchte polygonale Näherung von F berechnet. Eingabe soll die Menge S sein, Ausgabe die Menge von Kanten des Polygonzugs (oder der Polygonzüge). Wie ist die Laufzeit des Algorithmus?
Hinweis: Ein vollständiger Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich, eine kurze Plausibilitätsüberlegung genügt.
Noch ein Tipp: Gesucht ist also ein Kriterium, das die Kanten aus Teil c) aus der gesamten Delaunay-Unterteilung hervorhebt – wenn diese Kanten die diskrete Näherung der Kurve F sind, was entspricht dann der medialen Achse $\mathcal{M}(F)$?

Und noch eine Hintergrundinfo: Was hier berechnet wird, ist die sogenannte Kruste (*crust*) von F; man kann beweisen, dass für nicht allzu große Sampledichte r die Kruste tatsächlich die Kurve F annähert und auch eine Schranke für die maximale Abweichung ausrechnen – wer es genauer wissen will:

N. Amenta, M. Bern, D. Eppstein, *The crust and the beta-skeleton: combinatorial curve reconstruction*, Graphical Models & Image Processing 60/2(2):125-135, 1998.