Ergänzungen zur Klasse Matrix

Funktionsweise besser erklärt mit der Variablen <u>this</u>

Wenn ein Objekt eine Methode für sich aufruft

z.B. a.multiply (b)

↑

a ruft multiply für sich auf

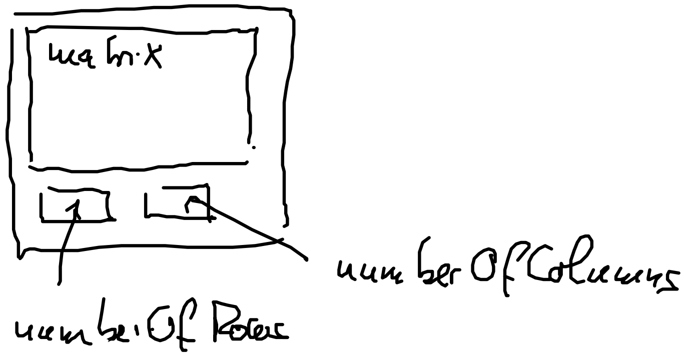
so wird der Methode beim Aufruf eine Referenz auf das aufrufende Objekt übergeben. Dies geschieht implizit. Diese Referenz kann in der Klasse unter dem Namen this angesprochen werden. Damit hat man Zugriff auf alle Komponenten und Methoden eines jeden Objektes, das (außerhalb der Klasse) benutzt wird.

Klasse Matrix neu geschrieben unter Verwendung von this

Matrix Objekt hat 3 Komponenten (privat)

- double[][] matrix für Einträge
- int numberOfRows für # Zeilen
- int numberOfColumns für # Spalten

Speicherbild
eines Matrix Objektes



Ein solches Matrix Objekt kann in der Klasse
immer mit this angesprochen werden

this.matrix
this.numberOfColums ...

Code ansehen

Im Konstruktor

```
Matrix(int m, int n) { ... }
```

gibt es Anweisung

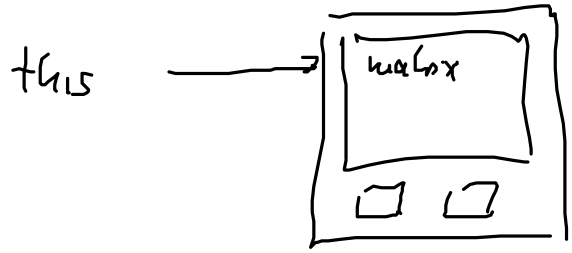
```
this.matrix = new double[m][n];
this.numberOfColumns = m;
this.numberOfRows = n;
```

sagen was Konstruktor machen soll, wenn er benutzt wird

Benutzung:

```
Matrix a = new Matrix(17, 20);
```

dann wird Speicher für Matrix Objekt angelegt



dieser Speicherplatz wird im Rumpf des Konstruktors unter this angesprochen

Genauso bei Methodenaufruf

void multiply (Matrix $\underline{\underline{b}}$) { .. }

Beim Aufruf a.multiply(b) wird a mit b multipliziert. Das unbekannte aufrufende Objekt kann im Rumpf von multiply mit this angesprochen werden

C[i][j] += this.matrix[i][k] * b.matrix[k][j]

hier aufrufendes Objekt gemeint (bei unserem Aufruf also a)

hier b gemeint

6.2.2. Ein Produktionsmodell

1 Betrieb, 2 Produktionsstätten

Rohstoffe $\longrightarrow P_1 \xrightarrow{\text{Zwischenprodukte}} P_2 \xrightarrow{\text{Endprodukte}}$

Rohstoffe $R_1, .., R_n$ zu Zwischenprodukten $Z_1, .., Z_p$

Zwischenprodukte zu Endprodukten $E_1, .., E_m$

Tabelle Rohstoffbedarf für Zwischenprodukte

	R_1	R_2	R_j	...	R_n
Z_1	b_{11}	b_{12}	b_{1j}		b_{1n}
$\vdots$					
Z_i			b_{ij}		
$\vdots$					
Z_p					

Einheiten an R_j zur Produktion von einer Einheit Z_i

Zeile enthält
Einheiten von benötigten Rohstoffen
für eine Einheit von Z_i

Tabelle Zwischenproduktbedarf für Endprodukte

	Z_1	Z_2	... Z_j	Z_p
E_1	a_{11}	a_{12}		a_{1p}
$\vdots$				
E_i			a_{ij}	
$\vdots$				
E_m				

Einheiten von Z_j zur Produktion einer Einheit von E_i

Fassen die Tabellen als Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ auf.

Wollen berechnen: c_{ij} = # Einheiten von Rohstoff j zur Produktion einer Einheit von E_i

$$\underline{\underline{c_{ij}}} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \qquad + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

von Z_1 von Z_2 ...

aus Rohstoff-Zwischenprodukt Tabelle

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$= \boxed{\text{Zeile } i \text{ von } A} \cdot \boxed{\begin{matrix}\text{Spalte}\\ j\\ \text{von}\\ B\end{matrix}}$$

	R_1	R_j	R_n
E_1	c_{11}	c_{1j}	c_{1n}
E_i		c_{ij}	
E_m			

$C = (c_{ij})$ = Rohstoffbedarfsmatrix: $\boxed{C = A \cdot B}$

Diese Daten verwenden zum Einkauf von Rohstoffen für bestimmte Produktion

↳ Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ ⇐ vorgegeben für die nächste Produktionsperiode

y_i = # Einheiten von E_i

"Produktionsvektor"

Dann benötigte Rohstoffe kaufen. Wie berechnen?

x_j = Bedarf an Rohstoff R_j zur Produktion von y

$$x_j = y_1 \cdot c_{1j} + y_2 \cdot c_{2j} + \ldots + y_m \cdot c_{mj}$$

$$= (y_1, y_2 \ldots y_m) \boxed{\begin{matrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{matrix}}$$

↑ j-te Spalte von C

$$= (c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{mj}) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Rohstoffvektor $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & & c_{m1} \\ c_{1j} & c_{2j} & \cdots & c_{mj} \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$= C^T$ (C transponiert)

entsteht dadurch dass die Zeilen von C die Spalten von C^T werden

(1. Zeile → 1. Spalte

2. Zeile → 2. Spalte

usw)

Also

Rohstoffbedarf x ergibt sich als $x = C^T y$

y Produktionsvektor, C Rohstoffbedarfmatrix

Hätte man auch 2-stufig berechnen können:

Zwischenproduktbedarf $z = A^T y$ zu y

Rohstoffbedarf $x = B^T z$ zu z

z einsetzen $\Rightarrow$ $\boxed{x = B^T(A^T y) \underset{\uparrow}{=} (B^T A^T) y}$

Matrizenmult. ist assoziativ

andererseits $x = C^T y$

$$C = AB \Rightarrow C^T = B^T A^T$$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$$

Jetzt andere Frage (bisher Rohstoffe für Produktion ermittelt)

Jetzt Rohstoffe vorgegeben, welche Produktion kann damit gefahren werden?

Gegeben: Rohstoffvektor $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Gesucht: Produktionsvektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ der mit diesen

Rohstoffen erzeugt werden kann

Wissen $\quad C^T y = r$

ausschreiben:

$$\boxed{\begin{aligned} c_{11} y_1 + c_{21} y_2 + \dots c_{m1} y_m &= r_1 \\ c_{12} y_1 + c_{22} y_2 + \dots c_{m2} y_m &= r_2 \\ &\cdots \\ c_{1n} y_1 + c_{2n} y_2 + \dots + c_{mn} y_m &= r_n \end{aligned}}$$

lineares Gleichungssystem in Unbekannten $y_1, \dots, y_m$
mit n Gleichungen

6.2.3 Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Ein Gleichsystem (hier in <u>Standardform</u> n Variable, m Gleich.)

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}\right\} m \text{ Gleichungen}$$

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$

n Unbekannte (Variable) $x_1 \dots x_n$

$A = (a_{ij})$ Koeffizientenmatrix, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ rechte Seite

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Variablenvektor   Kurzschreibweise $Ax = b$

Matrix-Vektor Multiplik.

Grundidee des Gaußschen Eliminationsverfahren

(1) elementare Operationen ändern den Lösungsraum nicht

= Menge aller Lösungsvektoren x

Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Spalten vertauschen

(beim nächsten Mal überprüfen)

(2) diese Operationen nutzen, um die erweiterte Matrix

$$\left(A \;\vdots\; b \right)$$

auf Dreiecksform zu bringen

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & & & \text{beliebig} & \\ & \neq 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \neq 0 & \\ \cdots & & & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{rechte Seite} \neq 0 \text{ möglich}$$

$= 0$ möglich

(3) Im Dreiecksform Lösbarkeit ablesen und (alle) Lösungen erzeugen

<u>Bsp</u>:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$(A \,\vdots\, b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Zeile von 2. und 3. abgezogen

Dreiecksform

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_2 &= 1 \\ 0 &= 1/2 \end{aligned}$$

unlösbar

← falls hier $0 = 0$ so Lösung einfach <u>rückwärts</u> berechnen

$$-2x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1/2$$

$$x_1 + \left(-1/2\right) = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 3/2$$