

Ergänzungen zur Klasse Matrix

Funktionsweise besser erklärt mit der
Variablen this

Wenn ein Objekt eine Methode für sich aufruft

z.B. `a.multiply(b)`

↑
a ruft multiply für sich auf

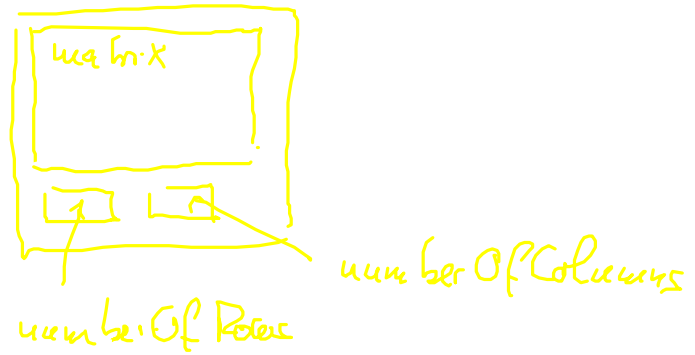
so wird der Methode beim Aufruf eine Referenz auf
das aufrufende Objekt übergeben. Dies geschieht
implizit. Diese Referenz kann in der Klasse unter
dem Namen `this` angesprochen werden. Damit hat
man Zugriff auf alle Komponenten und Methoden eines
jeden Objektes, das (außerhalb der Klasse) benutzt wird.

Klasse Matrix neu geschrieben unter Verwendung von `this`

Matrix Objekt hat 3 Komponenten (privat)

- `double[][] matrix` für Einträge
- `int number of Rows` für # Zeilen
- `int number of Columns` für # Spalten

Speicherbild
eines Matrix Objektes



Ein solches Matrix Objekt kann in der Klasse
immer mit `this` angesprochen werden

`this.matrix`
`this.numberOfColumns` ...

Code ansehen

Im Konstruktor

```
Matrix (int m, int n) { ... }
```

gibt es Anweisung

```
this.matrix = new double [m][n];  
this.numberOfColumns = m;  
this.numberOfRows = n;
```

→
Sagen was Konstruktor machen soll, wenn er benutzt wird

Benutzung:

```
Matrix a = new Matrix (17, 20);
```

dann wird Speicher für Matrix Objekt angelegt



dieser Speicherplatz wird im Rumpf des Konstruktors auch
this angesprochen

Genau so bei Methodenaufruf

void multiply (Matrix b) { .. }

Beim Aufruf a.multiply(b) wird a mit b
multipliziert. Das unbekannt aufrufende Objekt
kann im Rumpf von multiply mit this angesprochen
werden

$$c[i][j] = \text{this.matrix}[i][k] * b.matrix[k][j]$$

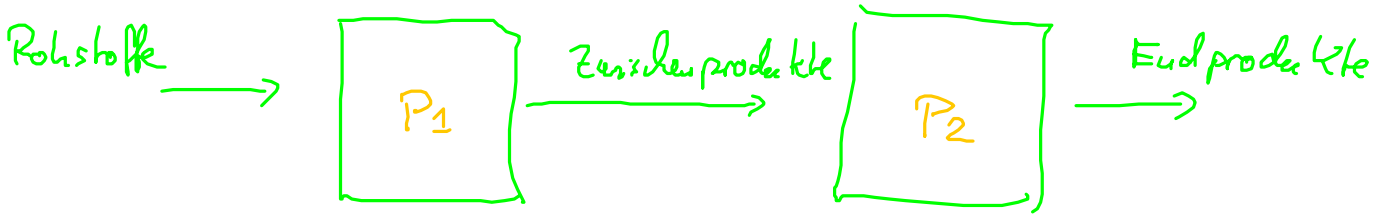
↑
hier aufrufendes
Objekt gemeint

↑
hier b gemeint

(bei unserem Aufruf also a)

6.2.2. Ein Produktionsmodell

1 Betrieb, 2 Produktionsstätten



Zwischenprodukte zu Endprodukten E_1, \dots, E_m

Tabelle Rohstoffbedarf für Zwischenprodukte

	R_1	R_2	R_j	\dots	R_n
Z_1	b_{11}	b_{12}	b_{1j}	\dots	b_{1n}
\vdots					
Z_i			b_{ij}		
\vdots					
Z_p					

Einheiten von R_j zur Produktion von einer Einheit Z_i

Zeile enthält

Einheiten von benötigten Rohstoffen

für eine Einheit von Z_i

Tabelle Zwischenproduktbedarf für Endprodukte

	Z_1	Z_2	\dots	Z_j	\dots	Z_p
E_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1p}
\vdots						
E_i				a_{ij}		
\vdots						
E_m						

Einheiten von Z_j zur Produktion einer Einheit von E_i

Fassen die Tabellen als Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ auf.

Wollen berechnen: c_{ij} = # Einheiten von Rohstoff j zur Produktion einer Einheit von E_i

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

\uparrow \uparrow
 von Z_1 von Z_2 ...

aus Rohstoff-Zwischprodukt Tabelle

$$= \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$= \boxed{\text{Zeile } i \text{ von } A}$$

•

Spalte
j
von
B

	R_1	R_j	R_n
E_1	c_{11}	c_{1j}	c_{1n}
E_i		c_{ij}	
E_m			

$C = (c_{ij})$ = Rohstoffbedarfsmatrix:

$$\boxed{C = A \cdot B}$$

Diese Daten verwenden zum Einkauf von Rohstoffen für bestimmte Produkte

↳ Vektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

← vorgegeben für die nächste Produktionsperiode

y_i = # Einheiten von E_i

"Produktionsvektor"

Dazu benötigte Rohstoffe kaufen. Wie berechnen?

x_j = Bedarf an Rohstoff R_j zur Produktion von y

$$x_j = y_1 \cdot c_{1j} + y_2 \cdot c_{2j} + \dots + y_m \cdot c_{mj}$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_m) \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix}$$

↑ j -te Spalte von C

$$= (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj}) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Rohstoffvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{m1} \\ c_{1j} & c_{2j} & \dots & c_{mj} \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}}_{C^T} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$$= C^T \quad (C \text{ transponiert})$$

entsteht dadurch dass die Zeilen von C die Spalten von C^T werden

(1. Zeile \rightarrow 1. Spalte
2. Zeile \rightarrow 2. Spalte
usw)

Also

Rohstoffbedarf x ergibt sich als $x = C^T y$

y Produktionsvektor, C Rohstoffbedarfmatrix

Hätte man auch 2-stufig berechnen können:

Zwischenproduktbedarf $z = A^T y$ zu y

Rohstoffbedarf $x = B^T z$ zu z

z einsetzen $\Rightarrow x = B^T (A^T y) = (B^T A^T) y$

Matrixmultiplikation ist assoziativ

andererseits $x = C^T y$

$$C = AB \Rightarrow C^T = B^T A^T$$

$$\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$$

Jetzt andere Frage (bisher Rohstoffe für Produktion ermittelt)

Jetzt Rohstoffe vorgegeben, welche Produktion kann damit gefertigt werden?

Gegeben: Rohstoffvektor $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$

Gesucht: Produktionsvektor $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ der mit diesen

Rohstoffen erzeugt werden kann

Wissen $C^T y = t$

ausgeschrieben:

$$\begin{array}{l} c_{11} y_1 + c_{21} y_2 + \dots + c_{m1} y_m = t_1 \\ c_{12} y_1 + c_{22} y_2 + \dots + c_{m2} y_m = t_2 \\ \dots \\ c_{1n} y_1 + c_{2n} y_2 + \dots + c_{mn} y_m = t_n \end{array}$$

lineares Gleichungssystem in Unbekannten y_1, \dots, y_m
mit n Gleichungen



6.2.3 Das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

lin. Gleichsystem (hier in Standardform n Variable, m Gleich)

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right\} m \text{ Gleichungen}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 n Unbekannte (Variable) $x_1 \dots x_n$

$A = (a_{ij})$ Koeffizientenmatrix, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ rechte Seite

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Variablenvektor

Kurzschreibweise $Ax = b$

↑
Matrix-Vektor Multiplik.

Grundidee des Gaußschen Eliminationsverfahren

① elementare Operationen ändern den Lösungsraum nicht

↑

= Menge aller Lösungsvektoren x

Addieren des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Spalten vertauschen

(beim nächsten Mal überprüfen)

② diese Operationen nutzen, um die erweiterte Matrix

$$\left(A \mid b \right)$$

auf Dreiecksform zu bringen

$$\begin{pmatrix} \neq 0 & & & \\ & \neq 0 & & \\ & & \dots & \\ & & & \neq 0 & \dots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{beliebig} \\ \end{matrix}$$

↑ rechte Seite $\neq 0$ möglich

$= 0$ möglich

③ In Dreiecksform Lösbarkeit ablesen und (alle) Lösungen erzeugen

Bsp:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\x_1 - x_2 &= 0 \\x_1 + 2x_2 &= 2\end{aligned}$$

$(A|b)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Zeile von
2. und 3. abgezogen

Dreiecksform

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\-2x_2 &= 1 \\0 &= 1/2\end{aligned}$$

unlösbar

← falls hier $0 = 0$

so Lösung zuerst rückwärts
berechnen

$$-2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = -1/2$$

$$x_1 + (-1/2) = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 3/2$$