

6.2.3 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

lin. Gleich. Syst.

$$\begin{array}{l} m \\ \text{Gleichungen} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{reelle} \\ \text{Seite} \end{array}$$

| | |
n Variable

Kurzschreibweise: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \\ & \dots & \\ & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lösung: Ein Vektor x des $Ax = b$ erfüllt

Lösungsraum = Menge aller Lösungen

Der Lösungsraum ändert sich nicht wenn

- elementar $\left\{ \begin{array}{l} - \text{man eine Gleichung mit Zahl } \neq 0 \text{ multipliziert} \\ - \text{man ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen} \\ - \text{addiert} \end{array} \right.$
- Umformungen
- Vertauschungen $\left\{ \begin{array}{l} - \text{man Zeilen (Gleichungen) vertauscht oder Spalten} \\ - \text{vertauscht} \end{array} \right.$

ohne Beweis (siehe Skript, UL Lineare Algebra)

SATZ: Jedes lin. Gleich Syst $Ax=b$ kann durch elem. Umformungen und Vertauschungen auf Dreiecksform gebracht werden, d.h. die erweiterte Matrix $(A|b)$ hat dann folgende Form:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{a}_{11} \neq 0 & & & \bar{b}_1 \\ & \bar{a}_{22} \neq 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{a}_{kk} \neq 0 & \bar{b}_k \\ & & & & \vdots \\ & & & & \bar{b}_m \end{array} \right)$$

\bar{a}_{ij} bel

falls hier noch Zeilen übrig bleiben (also $k < m$)

Bsp: 1. $m \leq n$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} k=2 < n \quad x_3 &= 0 \\ -x_2 + 0 &= -3 \Rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 + 3 + 0 &= 2 \Rightarrow x_1 = -3 \end{aligned}$$

1. Gleichd.
um 2. abziehen

Dreiecksform
mit $k=2=m$

2.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

→
Vertauschung
Spalte 2 und 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & \neq 0 & \\ \neq 0 & & & \\ \neq 0 & & & \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_3 \quad x_2$ Dreiecksform

$$\begin{aligned}
 3. \quad m > n : \quad & x_1 + x_2 = 1 \\
 & x_1 - x_2 = 0 \\
 & x_1 + 2x_2 = 2
 \end{aligned}$$

$$k=2 < n=3$$

Wähle $x_2 = c$ (letzte Spalte)

$$2x_3 + 0x_2 = -3$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{3}{2} + c = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} - c$$

$$(A:b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 1 & 2 & \vdots & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 \end{array} \right)$$

1. Gleich von
anderen abziehen

$$\begin{array}{l}
 \rightarrow \\
 \frac{1}{2} \text{ faches von} \\
 \text{Gleich 2 an} \\
 \text{Gleich 3 addieren}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -2 & \vdots & -1 \\ \hline 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$m=3$$

$$k=2$$

$$\bar{b}_3 \neq 0$$

\Rightarrow unlösbar

letzte Gleichung sagt $\underbrace{0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = \frac{1}{2}}_{\text{nicht erfüllbar}}$

Beweis: Angabe eines Bsp, das dies widerlegt

Also im Strukturraum

Setze $(\tilde{A} : \tilde{b}) := (A : b)$ und $i := 1$

$\tilde{A} \neq 0$ (Nullmatrix) und $i \leq \min\{m, n\}$

Ändere $(\tilde{A} : \tilde{b})$ durch Vertauschungen
bis $\tilde{a}_{ii} \neq 0$. { Dieses \tilde{a}_{ii} heißt
Pivotelement }

Addiere zu allen Zeilen l mit $\tilde{a}_{li} \neq 0$
ein geeignetes Vielfaches c von Zeile i
so dass $\tilde{a}_{li} + c \cdot \tilde{a}_{ii} = 0$
{ Dies nennt man Pivotisierung

$i := i + 1;$

$i \leq \min\{m, n\}$

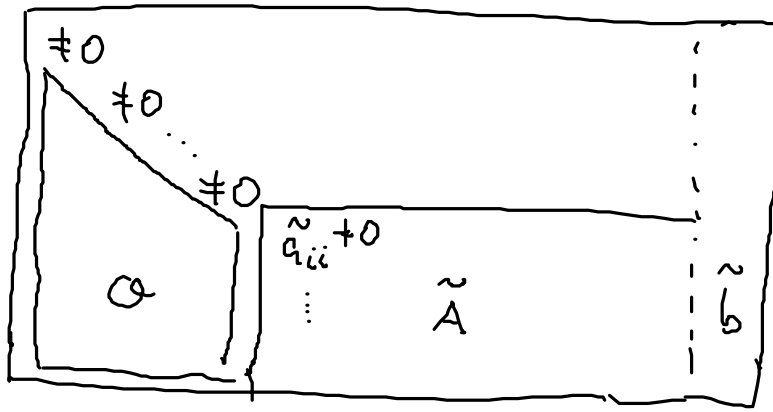
true

Lasse von $(\tilde{A} : \tilde{b})$ die Zeile und
Spalte mit Index i weg und
bezeichne die entstehende Matrix
wieder mit (\tilde{A}, \tilde{b})

\tilde{A} ist die
verbleibende
Restmatrix

My. arbeitet korrekt wegen folgender Schleifeninvariante:

Bei jedem Eintritt in die Schleife hat die erweiterte
Matrix folgende Form:



□

SATZ: Lösungskriterien für lin. Gleich. Syst.

Sei $Ax = b$ gegeben und seien $(\bar{A} : \bar{b})$ und k die durch das Gaußsche Verfahren gegebenen Größen. Dann gilt

a) $Ax = b$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung wenn im Falle $k < n$ $\bar{b}_i = 0$ für $i = k+1, \dots, m$ (*)

b) In diesem Fall (also wenn (*) gilt) erhält man alle Lösungen, indem man (für $k < n$) $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ beliebig wählt und die anderen Variablen x_1, x_2, \dots, x_k aus der Dreiecksform von unten nach oben berechnet

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 + \dots + \bar{a}_{1n} x_n &= \bar{b}_1 - (\bar{a}_{1,k+1} x_{k+1} + \dots + \bar{a}_{1n} x_n) \\
 \bar{a}_{22} x_2 + \dots + \bar{a}_{2k} x_k &= \bar{b}_2 - (\bar{a}_{2,k+1} x_{k+1} + \dots + \bar{a}_{2n} x_n) \\
 &\vdots \\
 \bar{a}_{kk} x_k &= \bar{b}_k - (\bar{a}_{k,k+1} x_{k+1} + \dots + \bar{a}_{kn} x_n)
 \end{aligned}$$

↑
↑
 Werte beliebig gewählt

Beweis: zu a)

1. Bedingung $\bar{b}_i = 0$ für $i > k$ ist notwendig
für die Lösbarkeit

denn: i -te Gleichung sagt $\underbrace{0x_1 + \dots + 0x_n}_{=0} = \bar{b}_i$

lösbar $\Rightarrow \bar{b}_i = 0$

2. Bedingung $\bar{b}_i = 0$ für $i > k$ ist hinreichend
für die Lösbarkeit

Dann funktioniert das Ausrechnen von oben
nach unten (ggf. durch beliebige Wahl von $x_{k+1} \dots x_n$ falls
 $k < n$), da Diagonalelemente $\bar{a}_{kk}, \bar{a}_{k-1,k-1}, \dots, \bar{a}_{11}$
alle $\neq 0$ sind und daher x_k, x_{k-1}, \dots, x_1
sukzessive ausgerechnet werden können

3. Sobald x_{k+1}, \dots, x_n (falls $k < n$) gewählt sind,
ergeben sich die Werte von x_k, x_{k-1}, \dots, x_1 eindeutig

klar durch Rückwärtsausrechnen

4. Durch beliebige Wahl von x_{k+1}, \dots, x_n und Rückwärts
ausrechnen bekommt man alle Lösungen

Sei \bar{x} eine Lösung. Setze $x_{k+1} := \bar{x}_{k+1}, \dots, x_n := \bar{x}_n$

3. \Rightarrow die anderen Komponenten von x ergeben sich eindeutig, das gilt auch für \bar{x}

$$\Rightarrow x_1 = \bar{x}_1, x_2 = \bar{x}_2, \dots, x_k = \bar{x}_k \Rightarrow x = \bar{x}$$

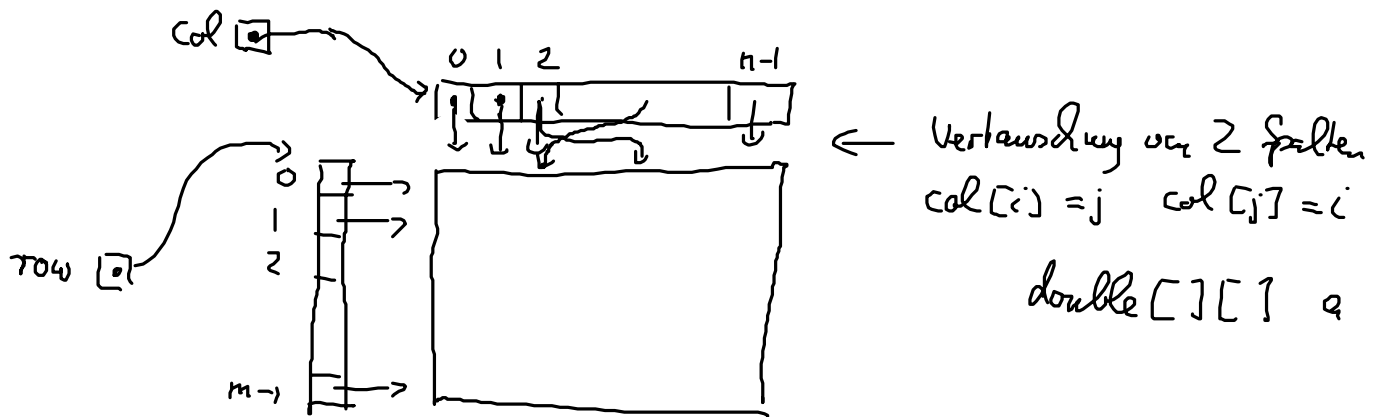
6.2.5

Java Klasse zur Lösung line. Gleich. Syst

Vertauschungen von Zeilen bzw. Spalten wird nicht durchgeführt (zu viel Aufwand)

Dafür: merken der Vertauschungen in zwei Hilfsarrays

int[] row; // Zeilenindex
int[] col; // Spaltenindex



anfangs $row[i] = i \quad col[j] = j$

dann immer Zugriff auf aktuelle Element an Position i, j
 über $a[row[i]][col[j]]$

Code der Klasse ansehen

- speziell:
- Pivotoperation
 - von unten nach oben ausrechnen