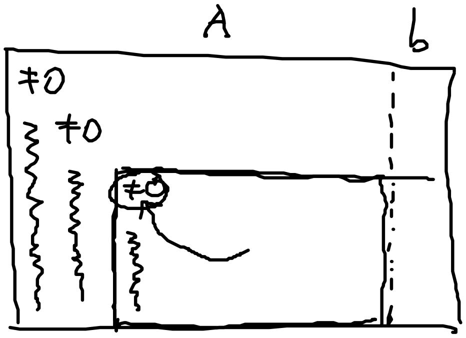
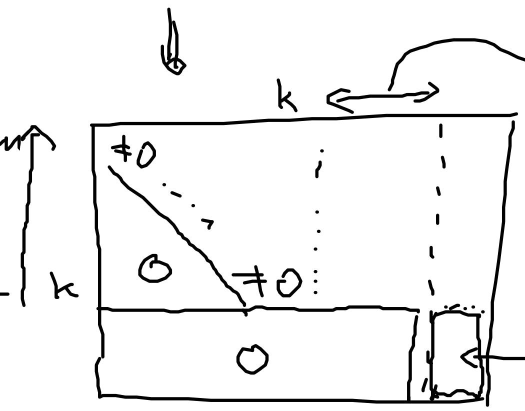
Gaußsches Eliminationsverfahren

Erweiterte Matrix $(A:b)$ auf Dreiecksform bringen



○ = Pivotelement muss ggf. gesucht werden in Restmatrix



diese Variable $x_{k+1} \dots x_n$ können beliebig gewählt werden

lösbar $\Leftrightarrow$ wenn in $\square$ alles 0

nutzen zum Ausrechnen der Variablen von unten nach oben

6.2.4 Wahl des Pivotelements

spielt große Rolle für die Exaktheit der numerischen Rechnung (Rechner rechnet mit double Zahlen, diese können nicht alle reellen Zahlen darstellen)

Bsp:

$$0{,}000100\, x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

soll auf 3-stelliger Arithmetik gelöst werden

Gleitkommazahlen haben Darstellung

$$0,\underbrace{x_1 x_2 x_3}_{3 \text{ Stellen},\ x_1 \neq 0} \cdot 10^e$$

Zahlen, die so nicht dargestellt werden können werden entsprechend gerundet

$$0,9999 \cdot 10^4 \rightsquigarrow 0,100 \cdot 10^5$$

$$= 9999 \qquad\qquad 10000$$

Gauß ergibt (Zeile 1 mit 10000 multiplizieren und von Zeile 2 abziehen)

$$x_1 \underbrace{(1 - 10000 \cdot 0,000100)}_{0} + x_2 \underbrace{(1 - 10000)}_{-9999 \rightsquigarrow -0,100 \cdot 10^5} = \underbrace{2 - 10000}$$

$$9998 = 0,9998 \cdot 10^4 \rightsquigarrow 0,100 \cdot 10^5$$

$$0,000100\, x_1 + x_2 = 1$$

$$-10000\, x_2 = -10000$$

Rückwärts ausrechnen $\Rightarrow \boxed{x_2 = 1\ ,\ x_1 = 0}$

Ergebnis bei 3-stelliger Arithmetik

völlig falsch, denn richtige Lösung

ist $x_1 = 1{,}00010 \qquad x_2 = 0{,}99990$

Ursache: $0{,}000100$ ist zu kleines Pivotelement im Verhältnis zu $a_{21} = 1$

Vermeidung: Wähle durch Zeilen und Spaltenvertauschung ein anderes Pivotelement

Bsp: Zeilenvertauschung:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 &= 2 \\ 0{,}000100\, x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

für Zeile 2 $=0$

$$x_1 \underbrace{(0{,}000100 - 0{,}000100)}_{0} + x_2 (\underbrace{1 - 0{,}000100}_{\substack{0{,}9999 \\ \leadsto 0{,}100 \cdot 10^1}}) = \underbrace{1 - 2 \cdot 0{,}000100}_{\substack{0{,}9998 \\ \leadsto 0{,}1 \cdot 10^1}}$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \underline{x_2 = 1, \; x_1 = 1}$$

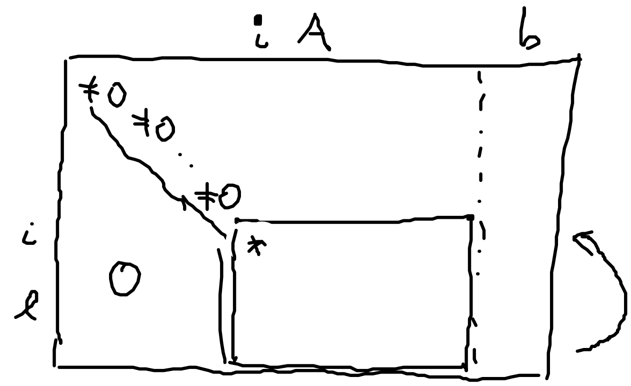
das Beste was in 3-stelliger Arithmetik möglich ist!

Suchstrategien für gute Pivotelemente:

① partielle Pivotsuche

② totale Pivotsuche

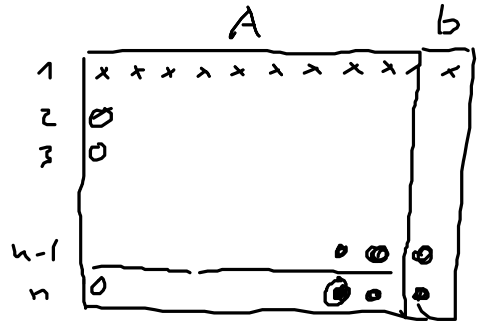
zu ① partielle Pivotsuche:



Tausche unter allen Zeilen $l \geq i$ diejenige mit Zeile i, die maximalen Absolutbetrag $|a_{li}|$ hat

Hierdurch entsteht zusätzlicher Aufwand im Verfahren
Wollen uns den Aufwand vom Gaußverfahren und den Zusatzaufwand ansehen

Gauß: Benötigte Anzahl von arithmetischen Operationen für Gauß Alg. (im schlimmsten Fall) um einfacher rechnen zu können sei $m = n$



Vielfaches $\underline{1 \text{ Zeile}}$ von allen anderen abziehen:

$(n+1)$ Mult $+ (n-1)(n+1)$ Subtrakt.

$= \underline{n(n+1)}$ arith. Operationen

$\underline{\text{Zeile } 2}$: $n + (n-2)n = \underline{(n-1)n}$

Zeile 3: $(n-2)(n-1)$

Zeile i: $(n-i+1)(n-i+2)$

Zeile $n-1$ $\quad 3 + 3 \quad 6$

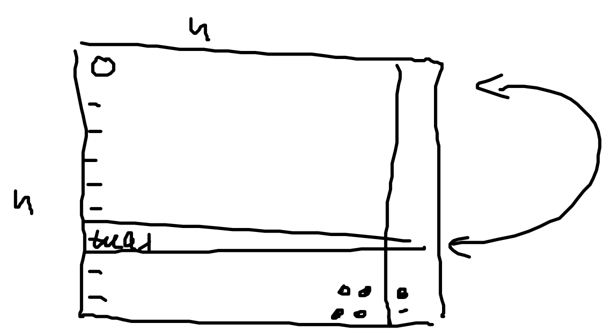
allgemein: $$\sum_{i=2}^{n} (n-i+1)(n-i+2) \approx \sum_{i=0}^{n} i^2 \approx n^3$$

Sparen uns $\underline{\text{Größenordnungen}}$ ermitteln

$\underline{\text{Kubischer Aufwand}}$

Gauß Algo hat kubischen Aufwand $\underline{n^3}$

$\underline{\text{Zusatzaufwand für partielle Pivotsuche}}$



2 Tausch erfordert

Zeile 1 : $n-1$ Vergleiche $+ \; 3(n+1)$ Zuweisungen

3 Vergleiche

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d] & b \arrow[l] \\ c \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$n-1+3(n+1) \approx 4n$$

Zeile 2 : $n-2$ Vergleiche $+ \; 3n$ Zuweis. $\approx 4(n-1)$

$\vdots$

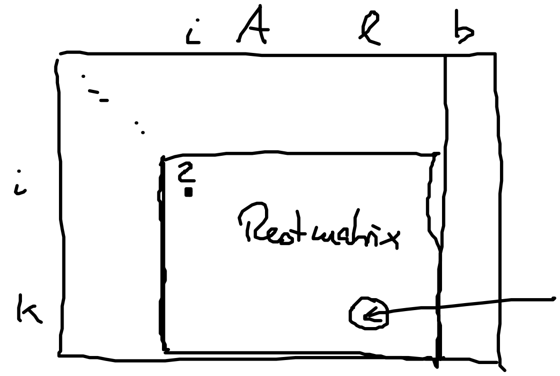
Zeile $n-1$ $\quad$ 1 Vergleich $+ \; 3 \cdot 3$ Zuweis. $\approx 4 \cdot 1$

$$\text{in Summe} \approx \sum_{i=1}^{n-1} 4i = 4 \underline{\sum_{i=1}^{n-1} i} = 4 \, \frac{n(n-1)}{2}$$

$$1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)$$

partielle Pivotsuche ist <u>quadratisch in n</u>

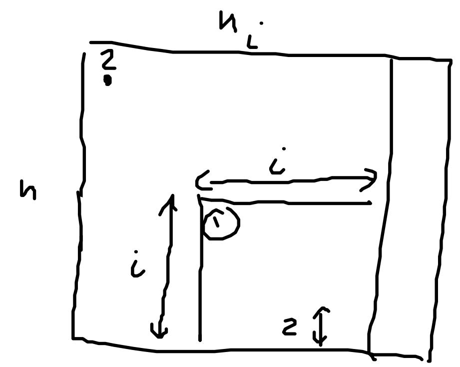
zu (2) totale Pivotsuche



suche Element mit größtem Absolutbetrag in Restmatrix mit $k \geq i$ $l \geq i$

Falls dieses an Position (k, l) ist,
so vertausche Zeilen i und k sowie Spalten i und l

Zusatzaufwand:



$$\text{Zeile } 1 \qquad n^2-1 \text{ Vergleiche} \;+\; \underbrace{\underset{\text{Zeilenvert.}}{3\cdot(n+1)} \;+\; \underset{\text{Spaltenvertausch}}{3n}}_{\text{Zuweisungen}}$$

$$= n^2-1+6n+3$$

Zeile $n-i+1$: $\quad i^2-1$ Vergleiche $+\left(3(i+1)+3i\right)$ Zuweisungen

$$i^2+6i+2$$

$$\text{Summe: } \sum_{i=2}^{n}(i^2+6i+2) = \underbrace{\sum_{i=2}^{n} i^2}_{\approx n^3} + 6\cdot\underbrace{\sum_{i=2}^{n} i}_{6\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\,\approx\, 3n^2} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} 2}_{2(n-1)\,\approx\, 2n}$$

kubischer Aufwand

Totale Pivotsuche hat kubischen Aufwand

mit später eingeführten Größenordnungsnotation:

Totale Pivotsuche in $n \times n$ Matrix erfordert $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen

---

6.3 Kürzeste Wege in Graphen

Powerpoint $\rightarrow$ pdf in ekreide