6.3 Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

ausgeteilte Folien

pdf file in ekreide

Beweis Bellman Gleichungen

$$\boxed{u_{ij}^{(m+1)} = \min_{k=1,\dots,n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]}$$

zeige: (1) "$\geq$"

(2) "$\leq$"

zu (1) zu zeigen: $u_{ij}^{(m+1)} \geq \min [\dots]$

verschiedene Fälle

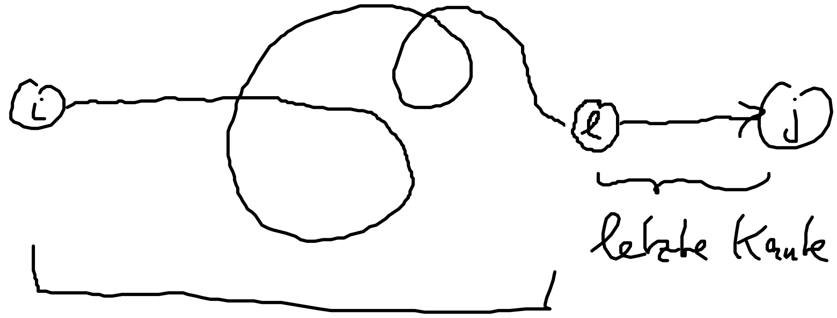
1. Fall $u_{ij}^{(m+1)} = \infty$ $\Rightarrow$ "$\geq$" trivialerweise erfüllt

2. Fall also sei $u_{ij}^{(m+1)} < \infty$

$\Rightarrow$ $\exists$ kürzesten Weg W von i nach j mit $\leq m+1$ Kanten und Länge$(W) = u_{ij}^{(m+1)}$

Unterfall 2A: W hat mindestens eine Kante

W:



letzte Kante auf W vor j

W' sei Anfangsstück von W bis zum Knoten l

$\Rightarrow$ Länge(W) = Länge(W') + a_{lj}

Beh.: $\boxed{W' \text{ ist kürzester Weg von } i \text{ nach } l \text{ mit } \le m \text{ Kanten}}$

Annahme nicht $\Rightarrow$ $\exists$ kürzeren solchen Weg W''

$\Rightarrow$ W'' + Kante (l, j) ist Weg von i nach j mit $\le m+1$ Kanten und kürzerer Länge als W

$\Rightarrow$ Widerspruch, da W kürzester Weg von i nach j mit $\le m+1$ Kanten

$\boxed{\text{Eigenschaft der optimalen Substruktur}}$

$$u_{ij}^{(m+1)} = \underbrace{u_{il}^{(m)}}_{\text{Länge}(W')} + a_{lj} \geq \min_{k=1,\dots,n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]$$

da l bei der Minimumsbildung vorkommt

Unterfall 2B: W hat keine Kante ("leerer Weg")

$\Rightarrow$ $i = j$ und damit ist Länge(W) = 0

$$u_{ii}^{(m+1)} \le u_{ii}^{(m)} \le \dots \le u_{ii}^{(1)} = a_{ii} = 0$$

$$= 0$$

Monotonielemma

$$\Rightarrow \quad u_{ii}^{(m)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{u_{ii}^{(m+1)}}_{0} = \underbrace{u_{ii}^{(m)}}_{0} + \underbrace{a_{ii}}_{0} \geq \min_{k=1\ldots n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{ki} \right]$$

da $k=i$ bei Min Bildung vorkommt

<u>zu ②</u>: zu zeigen $u_{ij}^{(m+1)} \leq \min\limits_{k=1..n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]$

Fall A: rechte Seite $= \infty$ $\Rightarrow$ "$\leq$" trivialerweise erfüllt

Fall B: Sei $\underbrace{\min\limits_{k=1..n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]}$ $< \infty$

min sei bei $k = r$ angenommen

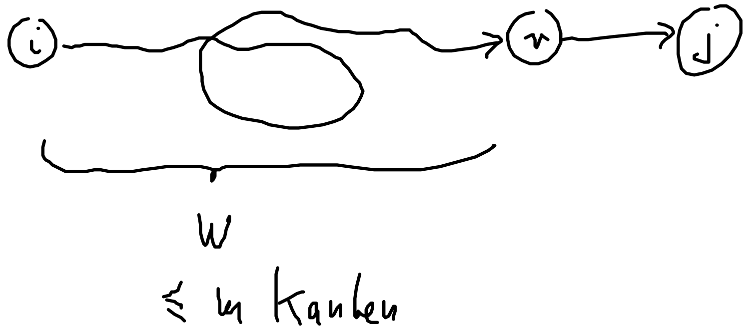
$$\Rightarrow \quad \min_{k} \left[\ldots \right] = u_{ir}^{(m)} + a_{rj} < \infty$$

$\Rightarrow$ beide Summanden $u_{ir}^{(m)} < \infty$ $\quad a_{rj} < \infty$

Unterfall B 1 $\qquad r \neq j \quad \Rightarrow$ Kante (r, j) existiert

Sei W ein kürzester Weg von i nach r mit $\leq m$ Kanten

$\Rightarrow$ Länge $(W) = u_{ir}^{(m)}$



$\Rightarrow$ W + Kante (r, j) ist Weg $\bar{W}$ von i nach j mit $\leq m+1$ Kanten

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Länge}(\bar{W})}_{\geq\, u_{ij}^{(m+1)}} = u_{ir}^{(m)} + a_{rj}$ $\Leftarrow$ da dies die Länge eines kürzesten Weges von i nach j mit $\leq m+1$ Kanten ist

Unterfall B2 $r = j$

$$\Rightarrow \min [\quad] = u_{ij}^{(m)} + \underbrace{a_{jj}}_{0} = u_{ij}^{(m)} \underset{\text{Monotonielemma}}{\geq} u_{ij}^{(m+1)}$$

□