6.3 Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

ausgeteilte Folien

pdf file in eKreide

Beweis Bellman Gleichungen

$$\boxed{u_{ij}^{(m+1)} = \min_{k=1,\dots,n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]}$$

Zeige: (1) "$\geq$"

(2) "$\leq$"

zu (1) zu zeigen: $u_{ij}^{(m+1)} \geq \min [\dots]$

verschiedene Fälle

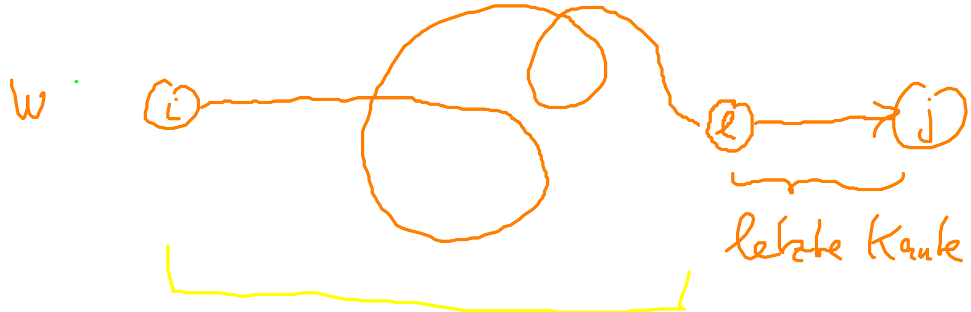
1. Fall $u_{ij}^{(m+1)} = \infty$ $\Rightarrow$ "$\geq$" trivialerweise erfüllt

2. Fall also sei $u_{ij}^{(m+1)} < \infty$

$\Rightarrow$ $\exists$ kürzesten Weg W von i nach j mit $\leq m+1$ Kanten

und $\text{Länge}(W) = u_{ij}^{(m+1)}$

Unterfall 2A: W hat mindestens eine Kante



letzte Kante auf W vor j

W' sei Anfangsstück von W bis zum Knoten l

$\Rightarrow$ Länge(W) = Länge(W') + a_{lj}

Beh.: **W' ist kürzester Weg von i nach l mit $\le m$ Kanten**

Annahme nicht $\Rightarrow$ $\exists$ kürzeren solchen Weg W''

$\Rightarrow$ W'' + Kante (l, j) ist Weg von i nach j mit $\le m+1$ Kanten und kürzerer Länge als W

$\Rightarrow$ Widerspruch, da W kürzester Weg von i nach j mit $\le m+1$ Kanten

Eigenschaft der optimalen Substruktur

$$u_{ij}^{(m+1)} = \underbrace{u_{il}^{(m)}}_{\text{Länge}(W')} + a_{lj} \geq \min_{k=1,\dots,n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]$$

da l bei der Minimumsbildung vorkommt

Unterfall 2B: W hat keine Kante ("leerer Weg")

$\Rightarrow$ $i = j$ und damit ist Länge$(W) = 0$

$$u_{ii}^{(m+1)} \le u_{ii}^{(m)} \le \dots \le u_{ii}^{(1)} = a_{ii} = 0$$

$= 0$

Monotonielemma

$\Rightarrow u_{ii}^{(m)} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{u_{ii}^{(m+1)}}_{0} = \underbrace{u_{ii}^{(m)}}_{0} + \underbrace{a_{ii}}_{0} \geq \min_{k=1\dots n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{ki} \right]$$

da $k = i$ bei Min Bildung vorkommt

<u>zu ②</u>: zu zeigen $u_{ij}^{(m+1)} \leq \min_{k=1..n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]$

Fall A: rechte Seite $= \infty$ $\Rightarrow$ "$\leq$" trivialerweise erfüllt

Fall B: Sei $\underbrace{\min_{k=1..n} \left[u_{ik}^{(m)} + a_{kj} \right]}$ $< \infty$

min sei bei $k = r$ angenommen

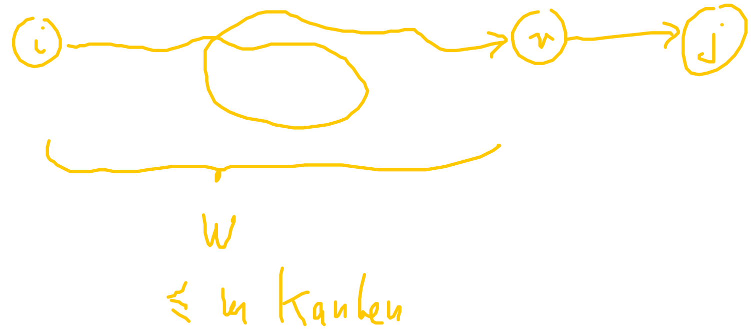
$$\Rightarrow \min_{k} [\dots] = u_{ir}^{(m)} + a_{rj} < \infty$$

$\Rightarrow$ beide Summanden $u_{ir}^{(m)} < \infty$ $a_{rj} < \infty$

Unterfall B 1 $\quad r \neq j$ $\Rightarrow$ Kante (r, j) existiert

Sei W ein kürzester Weg von i nach r mit $\leq m$ Kanten

$\Rightarrow$ Länge$(W) = u_{ir}^{(m)}$



$\Rightarrow$ W + Kante (r,j) ist Weg $\bar{W}$ von i und j mit $\leq m+1$ Kanten

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Länge}(\bar{W})}_{\vee/} = u_{ir}^{(m)} + a_{rj}$$

$u_{ij}^{(m+1)}$ $\Leftarrow$ da dies die Länge eines kürzesten Weges von i und j mit $\leq m+1$ Kanten ist

Unterfall B2 $\quad r = j$

$$\Rightarrow \min[\quad] = u_{ij}^{(m)} + \underbrace{a_{jj}}_{0} = u_{ij}^{(m)} \geq u_{ij}^{(m+1)}$$

$\uparrow$ Monotonielemma $\square$