Kürzeste Wege

- Bellman Gleichungen für kürzeste Weglängen
- Berechnung der kürzesten Weglängen
  wenn der Graph keine negativen Zykel enthält
  "Art Matrix Multiplikation"

Heute:

- Wie kann man feststellen ob der Graph negative Zykel hat?
- Wie ermittelt man kürzeste Wege?

Satz:

(1)		(2)		(3)
G hat negativen Zykel	$\Leftrightarrow$	G hat elementaren negativen Zykel	$\Leftrightarrow$	$\exists$ Knoten i mit $u_{ii}^{(n)} < 0$

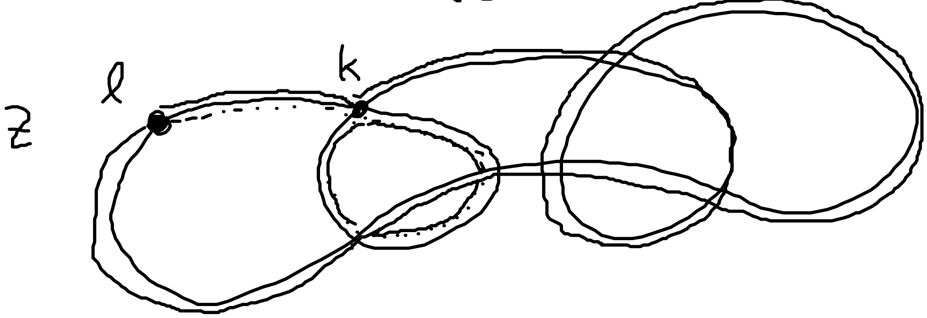
Beweis durch Ringschluss:

$(1) \Rightarrow (2)$

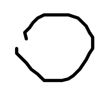
Annahme: G hat negativen Zykel

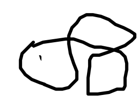
zu zeigen: G hat einen elementaren negativen Zykel

Sei Z ein negativer Zykel von G. Ist dieser elementar, so ist (2) gezeigt.
Also sei Z nicht elementar



Durchlauf Z von (beliebigen) Startknoten l bis man zum ersten Mal auf den selben Knoten kommt, dieser sei k $(k \neq l)$

Betrachte Teilweg von k nach k , dies ist ein elementarer Zykel, wir nennen ihn Z_1

$\Rightarrow$ $Z_2 := Z - Z_1$ ist ebenfalls ein Zykel 

und $Z = Z_1 + Z_2$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Länge}(Z)}_{<0} = \underbrace{\text{Länge}(Z_1) + \text{Länge}(Z_2)}_{\text{mind. einer der beiden muss } < 0 \text{ sein}}$$

ist dies Z_1 (Z_1 elementar) so folgt (2)

ist es Z_2, so wende das Verfahren auf Z_2 an

da G endlich, folgt, dass irgendwann ein elementarer negativer Zykel gefunden wird

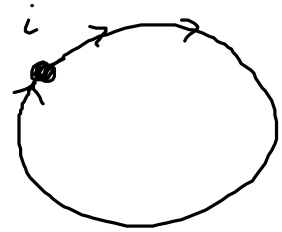
(2) $\Rightarrow$ (3)

Voraussetzung: G hat elementaren negativen Zykel

Behauptung: $\exists$ Knoten i mit $u_{ii}^{(n)} < 0$

Sei Z ein elementarer negativer Zykel von G. Sei i ein Knoten auf Z

Z



Sei ℓ die Kantenzahl von Z

$\Rightarrow \ell \leq n$, da elementar

Monotonielemma

$$0 > \text{Länge}(Z) \geq u_{ii}^{(\ell)} \geq u_{ii}^{(n)}$$

da kürzeste Weglänge von i nach i mit $\leq \ell$ Kanten

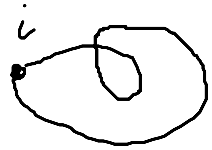
(3) $\Rightarrow$ (1)

Voraussetzung: $\exists$ Knoten i mit $u_{ii}^{(n)} < 0$

zu zeigen: G hat negativen Zykel

Sei W der Weg zu $u_{ii}^{(n)}$. Dieser ist Zykel mit Länge $u_{ii}^{(n)} < 0$

W



$\Rightarrow$ (1)

$\square$

<u>SATZ</u>: Hat G keine negativen Zykel

so liefert die Zeile tree[i] von tree bei Abbruch des Algo

für jeden Knoten i einen Kürzeste-Wege Baum T_i mit

$V_i = \{ j \in V \mid tree[i][j] \neq -1 \} \cup \{i\}$

$E_i = \{ (tree[i][j], j) \mid j \in V_i \setminus \{i\} \}$

Beweis: Nach Def der tree Matrix sind die Wege in T_i kürzeste Wege von i zu den anderen Knoten j

Müssen noch zeigen: T_i ist gerichteter Baum

d.h.
- $\exists$ Wurzel w $\quad w = i$
- in jeden Knoten $\neq w$ geht genau eine Kante rein
- jedes Knoten $\neq w$ ist von w aus auf einem Weg erreichbar

$\boxed{2.}$

Kanten def als $(\underline{tree[i][j]}, j)$

dieser Eintrag existiert nur an Position (i,j) der tree Matrix

das ergibt also nur eine einzige Kante, die in j reingeht $\square$

Kürzester Wege Baum von $i = 4$ aus:

$tree[4] =$

0	1	2	3	4
3	0	3	4	-1