

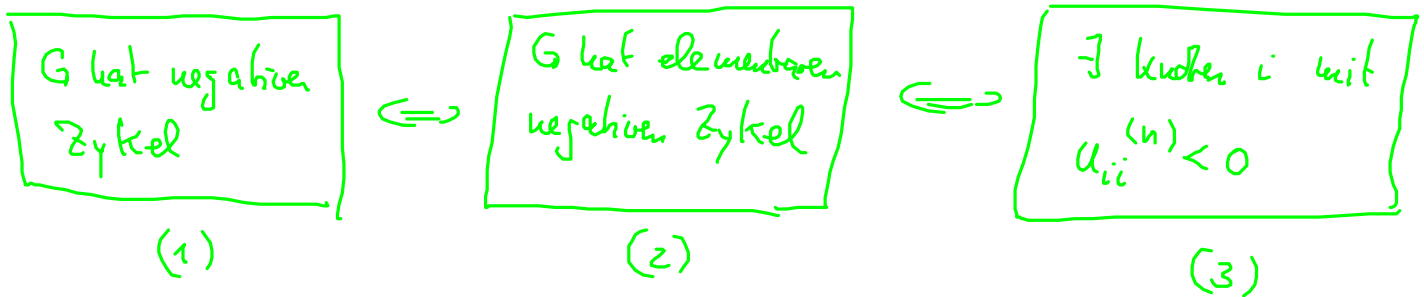
## Kürzeste Wege

- Bellman Gleichungen für kürzeste Weglängen
- Berechnung des kürzesten Weglängen  
wenn der Graph keine negativen Zyklen enthält  
"Art Matrix Multiplikation"

Heute:

- Wie kann man feststellen ob der Graph negative Zyklen hat?
- Wie ermittelt man kürzeste Wege?

Satz:



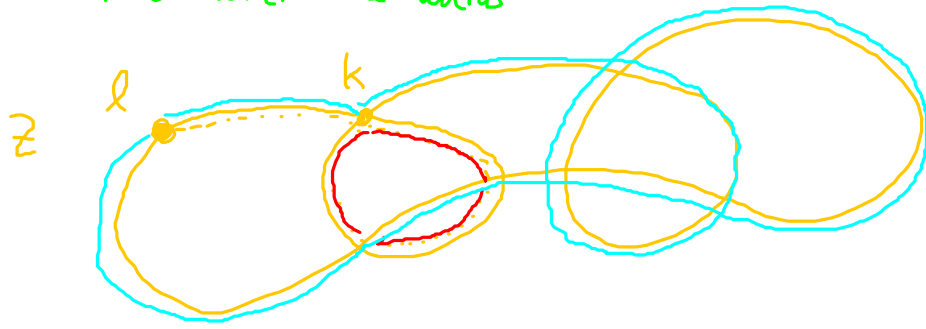
Beweis durch Ringchluss:

(1)  $\implies$  (2)


Annahme:  $G$  hat negativen Zykel


zu zeigen:  $G$  hat einen elementaren negativen Zykel

Sei  $Z$  ein <sup>negativer</sup> Zykel von  $G$ . Ist dieses elementar, so ist  $(Z)$  gezeigt.  
 Also sei  $Z$  nicht elementar



Durchlauf  $Z$  von (beliebigen) Startknoten  $l$  bis man zum ersten Mal auf den selben Knoten kommt, dieser sei  $k$  ( $k \neq l$ )

Betrachte Teilweg von  $k$  nach  $k$  , dies ist ein elementarer Zykel, wir nennen ihn  $Z_1$

$\Rightarrow Z_2 := Z - Z_1$  ist ebenfalls ein Zykel 

$$\text{und } Z = Z_1 + Z_2$$

$$\Rightarrow \text{Länge}(Z) = \underbrace{\text{Länge}(Z_1) + \text{Länge}(Z_2)}_{< 0}$$

mind. einer der beiden muss  $< 0$  sein

ist dies  $Z_1$  ( $Z_1$  elementar) so folgt (2)

ist es  $Z_2$ , so wende das Verfahren auf  $Z_2$  an

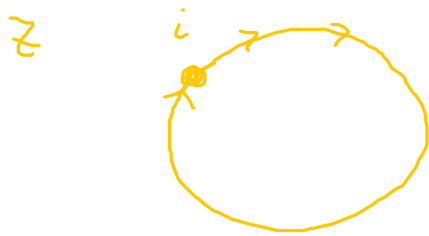
da  $G$  endlich, folgt, dass irgendwann ein elementarer negativer Zykel gefunden wird

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Voraussetzung:  $G$  hat elementaren negativen Zykel

Behauptung:  $\exists$  Knoten  $i$  mit  $u_{ii}^{(n)} < 0$

Sei  $Z$  ein elementarer negativer Zykel von  $G$ . Sei  $i$  ein Knoten auf  $Z$



Sei  $l$  die Kantenanzahl von  $Z$   
 $\Rightarrow l \leq n$ , da elementar

$0 > \text{Länge}(Z) \geq u_{ii}^{(l)} \geq u_{ii}^{(n)}$  Korollar Lemma  
 da  $\uparrow$  kürzeste Weglänge von  $i$  nach  $i$  mit  $\leq l$  Kanten

(3)  $\Rightarrow$  (1)

Voraussetzung:  $\exists$  Knoten  $i$  mit  $u_{ii}^{(n)} < 0$

zu zeigen:  $G$  hat negativen Zykel

Sei  $W$  der Weg zu  $u_{ii}^{(n)}$ . Dieser ist Zykel mit Länge  $u_{ii}^{(n)} < 0$



$\Rightarrow$  (1)

□

SATZ: Hat  $G$  keine negativen Zykel

so liefert die Zeile  $\text{tree}[i]$  von  $\text{tree}$  bei Ablauf des  $\text{BFS}$

für jeden Knoten  $i$  einen kürzeste-Weg Baum  $T_i$  mit

$$V_i = \{ j \in V \mid \text{tree}[i][j] \neq -1 \} \cup \{i\}$$

$$E_i = \{ (\text{tree}[i][j], j) \mid j \in V_i \setminus \{i\} \}$$

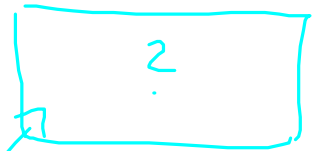
Beweis: Nach Def des tree Matrix sind die Wege in  $T_i$   
Kürzeste Wege von  $i$  zu den anderen Knoten  $j$

Wir müssen noch zeigen:  $T_i$  ist gerichteter Baum

d.h. •  $\exists$  Wurzel  $w$

- in jedem Knoten  $\neq w$  geht genau eine Kante rein
- jeder Knoten  $\neq w$  ist von  $w$  aus auf einem Weg erreichbar

$w = i$



Kanten def als  $(\text{tree}[i][j], j)$

dieser Eintrag existiert nur an Position  $(i, j)$  der tree Matrix

das ergibt also nur eine einzige Kante, die in  $j$  rein geht  $\square$

Kürzester Weß Baum von  $i=4$  aus:

