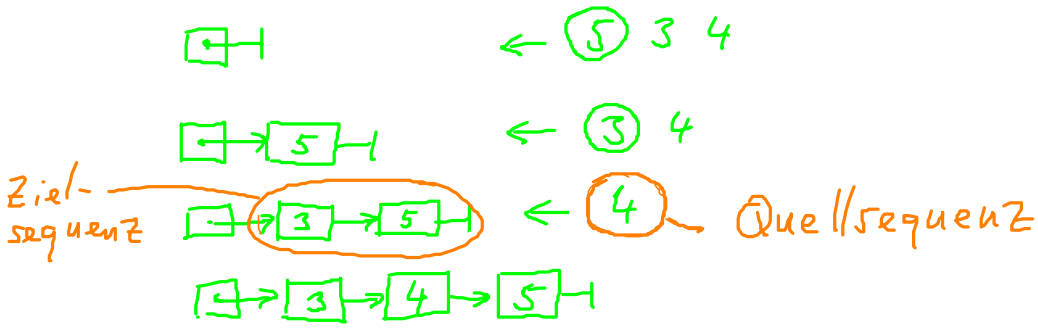
10.1.3 Insertion Sort

Idee → siehe Aufgabe 44



Jetzt im Array
→ andere Suche „
→ anderes Einfügen

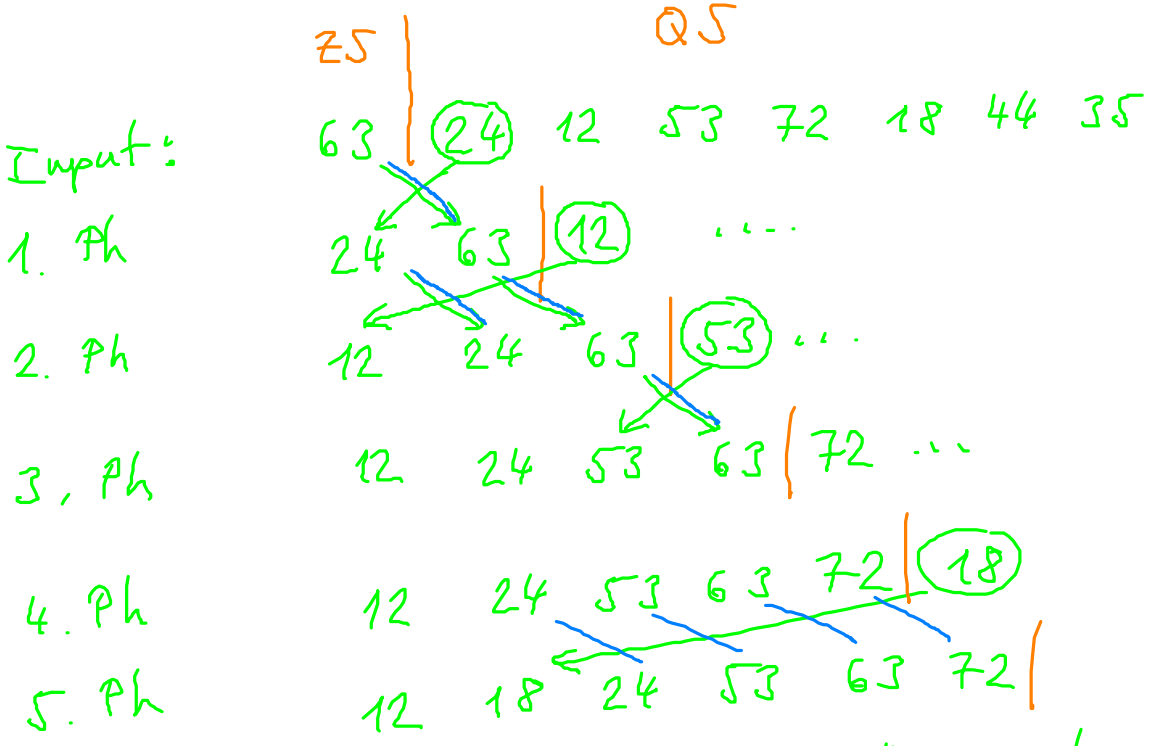
Informale Beschreibung:

1. geg. Array vec[n]. Zu Anfang sei vec[0] die Zielsequenz (sortiert) und vec[1], ..., vec[n-1] die Quellsequenz (unsortiert)
2. n-1 Phasen
3. in Phase i: nehme vec[i] aus QS und füge in ZS an richtiger Stelle ein.

Invariante: nach Phase i gilt für die akt. ZS

$$vec[0].key \leq vec[1].key \leq \ldots \leq vec[i].key$$

Zustandsverlauf:



Anzahl Vergleiche: kann ZS binär durchsuchen

$\Rightarrow \lfloor \log i \rfloor + 1$ Vergleiche in Phase i

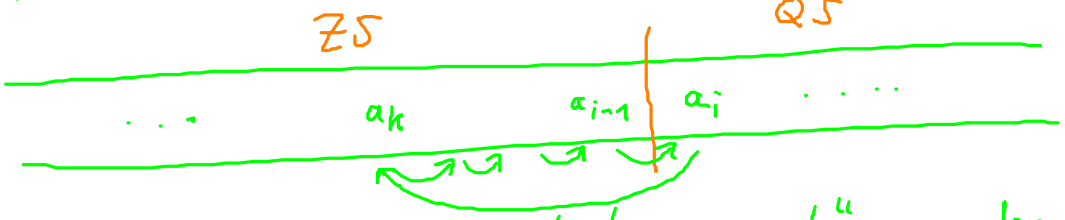
$$C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lfloor \log i \rfloor + 1 \right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(\log(n-1) + 1 \right)$$

$$= (n-1) \left[\log(n-1) + 1 \right]$$

$$\in O(n \log n)$$

(in lin. Liste $\Rightarrow C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \in O(n^2)$)

Anzahl Zuweisungen: muss Teil der ZS nach rechts verschieben $\rightarrow$ Ringtausch im Array



max. Länge der Verschiebung = Länge der ZS = i

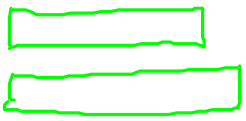
$$\Rightarrow A(n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} i \in O(n^2)$$

(in lin. Liste je 2 Zuweisung je Phase $\Rightarrow A(n) \in O(n)$)

10.2 Mergesort

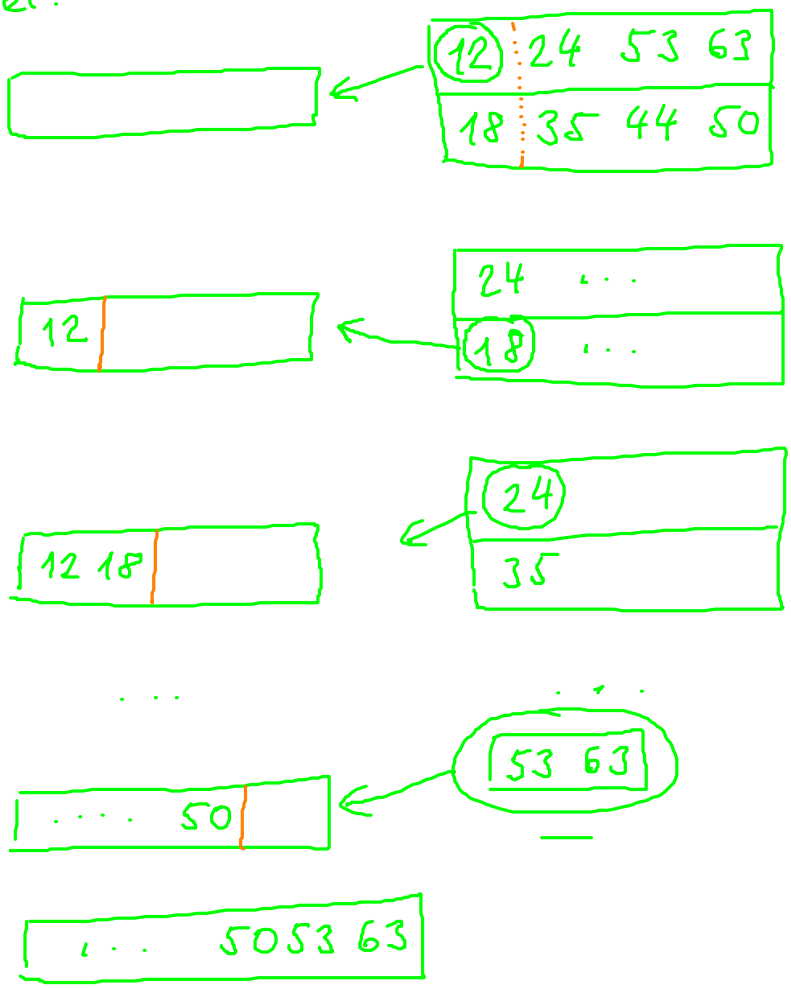
Sortieren durch Mischen ("merge")

10.2.1 Mischen sortierter Arrays

Input:  n, m — nichtabsteigend "$\leq$" sortierte Arrays

Output:  m+n — nichtabst. sortiert

Beispiel:



merge (vec1, vec2)

Input: nichtabst. sort. Arrays vec1, vec2 mit Längen m, n (Indizes ab 0)

Output: nichtabst. sort. Array der Länge m+n mit den Werten aus vec1, vec2

```
init. Array vec[] der Länge m+n
i := j := k := 0
while i < m and j < n do                    { mischen }
    if vec1[i].key ≤ vec2[j].key then
        vec[k] := vec1[i]
        i := i+1
    else
        vec[k] := vec[j]
        j := j+1
    endif
    k := k+1
end while
if i = m then                               { kopiere Restarray }
    vec[k, ..., m+n-1] := vec2[j, ..., n-1]
else
    vec[k, ..., m+n-1] := vec1[i, ..., m-1]
endif
return vec
```

Anzahl Vergleiche: 1 Verg. pro while-Iteration

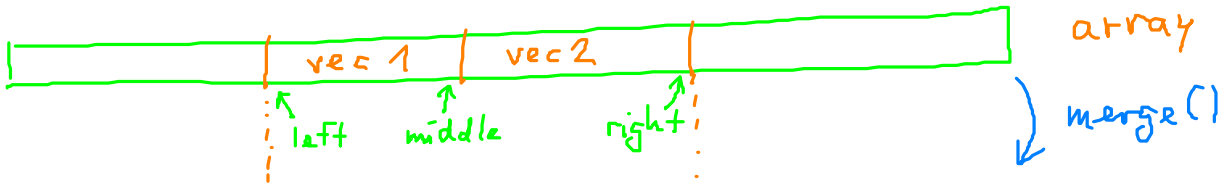
max. $m+n-1$ Iterationen

$\Rightarrow \quad C(m,n) \leq m+n-1$

Anzahl Zuweisungen: müssen Array vec zuweisen

$\Rightarrow \quad A(m,n) = |vec| = m+n$

In der Praxis: muss in situ mischen, d.h.



→ brauche Methode mit Schnittstelle

merge (vec, left, middle, right)

Input: Array vec []
Index left, wo vec1 beginnt
Index middle, wo vec1 endet und bei middle +1 vec2 beginnt
Index right, wo vec2 endet

Output: vec, zwischen left und right sortiert

10.2.2 Mergesort: rekursives Mischen

mergesort (vec)

Input: Array vec [] der Länge n (Indizes ab 0)

Output: vec, nichtabst. sortiert

sortMe (vec, 0, n-1) { rek. Erstaufruf}

return vec

sortMe (vec, first, last)

Input: Array vec [], Indizes first, last

Output: vec, zwischen first und last nichtabst. sortiert

if first ≠ last then

middle := $\lfloor \frac{1}{2} (first + last) \rfloor$

Aktion
- sortMe (vec, first, middle)
- sortMe (vec, middle+1, last)

} Rekursion

- merge (vec, first, middle, last)

endif

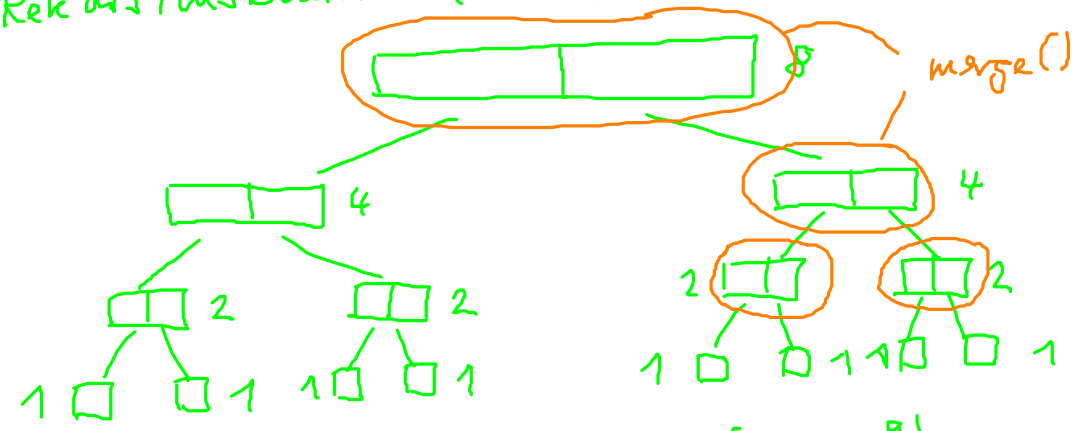
return vec

Korrektheit: sortMe() arbeitet korrekt

Bew: (IA) $n=1$ ⇒ sortMe(vec, 0, 0) tut nichts und vec[0] ist sortiert. ✓

(IS) $n>1$: nach Wahl von middle sind die Bereiche [first, middle] und [middle+1, last] kürzer als n. (IV) ⇒ sortMe() sortiert beide Teile korrekt. merge() korrekt ⇒ sortMe() korrekt. □

Rekursionsbaum ($n = 8$):



Aus dem lesen wir ab: ($n = 2^q$)

$$R(2^q) = q + 1$$

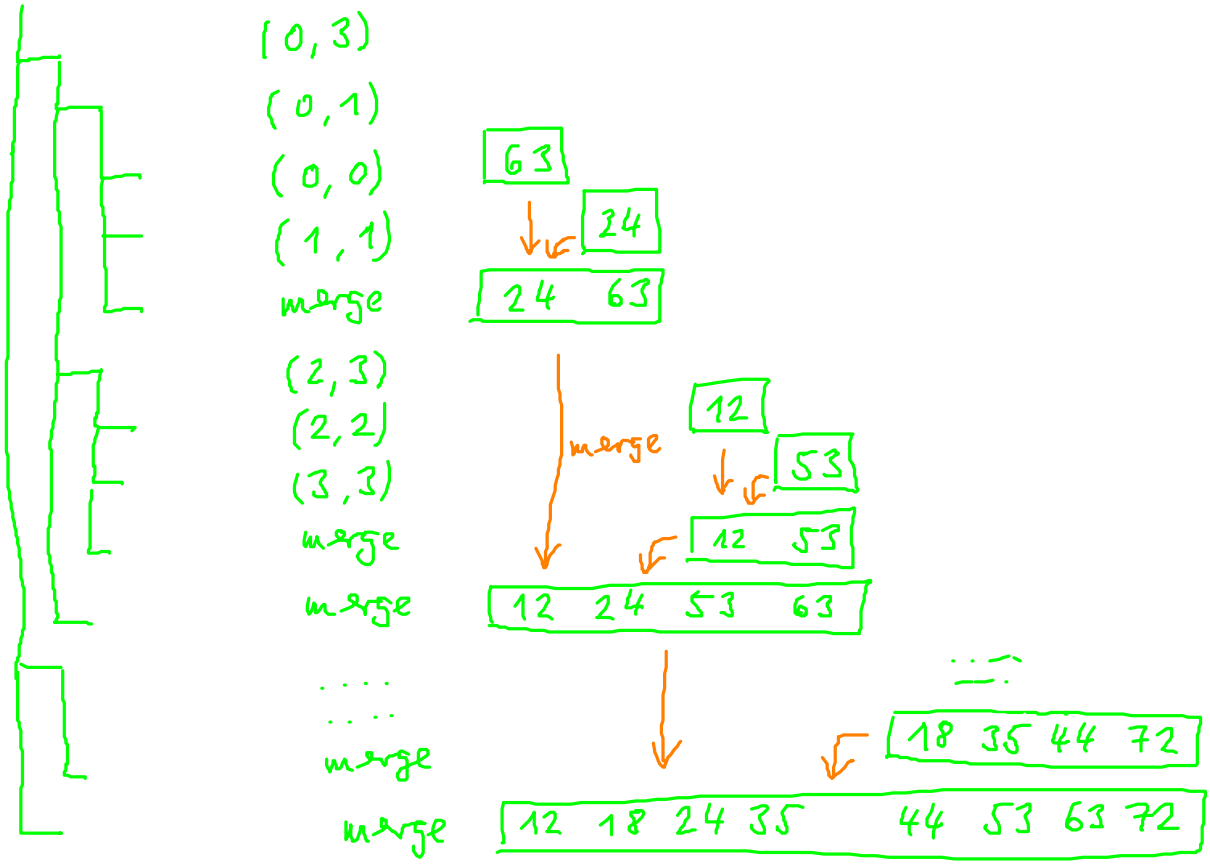
$$T(2^q) = \sum_{k=0}^{q} 2^k = 2^{q+1} - 1$$

Beispiel:

sortMe(vec, 0, 7)

63	24	12	53	72	18	44	35

vec



10.2.3 Analyse

gesehen: Für $n = 2^q$ ist Rekursionsbaum vollst. bin. Baum.

→ kenne seine Eigenschaften

→ sei bis auf Weiteres zunächst $n = 2^q$

Aufbau von sortMe() liefert sofort Rekursionsformeln:

1) $C(2) = 1$, $C(2n) = 2\,C(n) + C(n,n)$ $(n > 2)$

wissen aus 10.2.1: $C(m,n) = m + n - 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{C(2) = 1,\quad C(2n) = 2\,C(n) + 2n - 1}$ $(n > 2)$

suche geschlossene Formel für $C(n)$

(→ Skript für Idee)

Beh: $\boxed{C(2^q) = (q-1)\,2^q + 1}$

Bew: (IA) $q=1$: $C(2) = 0 \cdot 2 + 1 = 1$ ✓

(IS) $C(2^{q+1}) = 2\,C(2^q) + 2 \cdot 2^q - 1$

$\overset{(IV)}{=} 2 \cdot [(q-1)2^q + 1] + 2^{q+1} - 1$

$= q\,2^{q+1} + 1$ □

2) $A(2) = 4$, $A(2n) = 2\,A(n) + \underbrace{A(n,n)}_{10.2.1 \Rightarrow 2n} + \underbrace{\text{Kopien der Arrays}}_{2n}$

$$\boxed{A(2) = 4, \quad A(2n) = 2\,A(n) + 4n \quad (n>2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A(2^q) = q\,2^{q+1}}$$

3) was wenn $n \neq 2^q$ für jedes q ?

Setze $q := \lceil \log_2 n \rceil$

damit: $2^{q-1} < n \leq 2^q \iff q-1 < \log_2 n \leq q$

$C(n)$, $A(n)$ monoton in n

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} C(n) \leq C(2^q) &= (q-1)2^q + 1 \\ &< \log_2 n \cdot 2n + 1 \in \mathcal{O}(n \log n) \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A(n) \leq A(2^q) &= q\,2^{q+1} \\ &< (\log_2 n + 1) \cdot 4n \in \mathcal{O}(n \log n) \end{aligned}}$$

Aussagen gelten immer $\Rightarrow$ auch im worst case!