Nächste Woche:

UE Di + (falls gewünscht) Mi

spezielle Verleihung Rücksprache

VL nur Do (dafür vielleicht kleine Überlänge)

Untere Komplexitätsschranken für das Sortieren

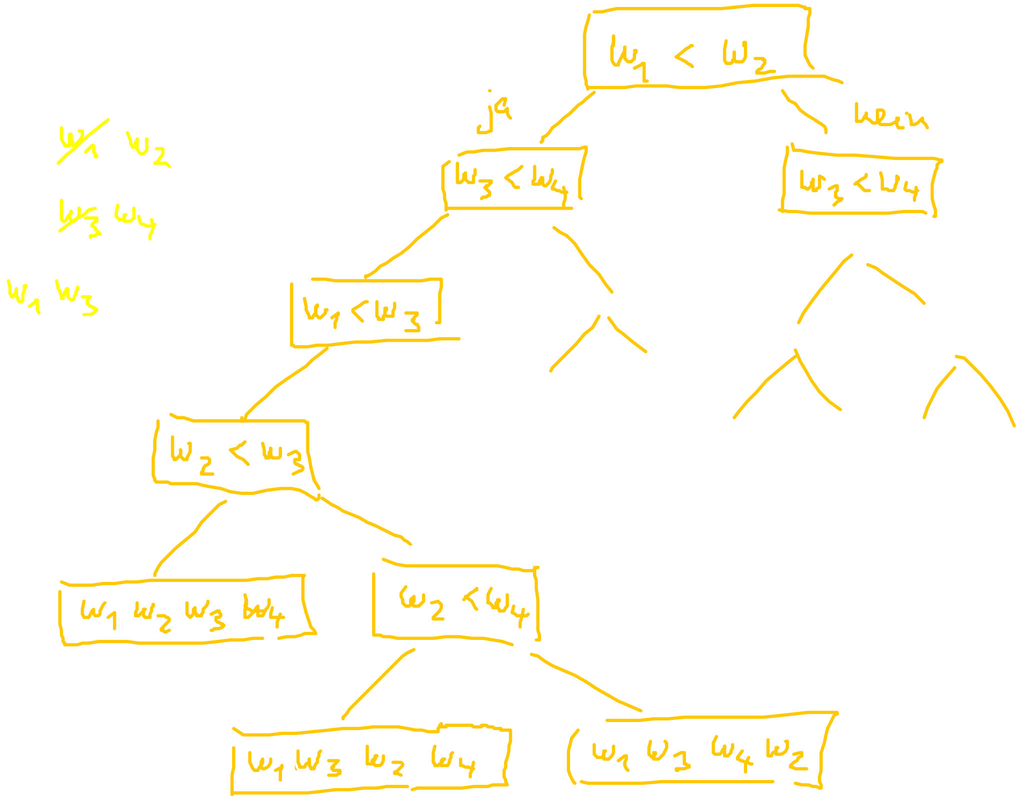
- deterministische Algos
- nutzen nur paarweise Vergleiche

Solche Algos können durch einen Entscheidungsbaum beschrieben werden

- innere Knoten sind Vergleiche
- Ein Weg von Wurzel bis Blatt entspricht Folge von Vergleichen, die im Algo für bestimmte Eingabe angestellt wird
- Blätter $\hat{=}$ Permutationen, die das Eingabe array richtig sortieren

Bsp: $[\, w_1 \mid w_2 \mid w_3 \mid w_4 \,]$ Mergesort

Entscheidungsbaum



SATZ: Jeder deterministische Sortieralgo, der auf paarweisen Vergleichen beruht, erzeugt einen solchen Entscheidungsbaum

Beweis: klar, da Algo deterministisch
jeder Vergleich ist eindeutig durch die vorigen festgelegt, der erste ebenfalls □

Worst Case $\underbrace{\text{Komplexität}}_{\text{von Algo } A}$ (Anzahl Vergleiche) bei Array mit $\underbrace{}_{n \text{ Elemente}}$

$$C_A(n) = \max_{\substack{v \text{ Blatt} \\ \text{in } T_A}} h(v) = h(T_A)$$

T_A = Entscheid. Baum für Algo A

Average Case Komplexität

$$\overline{C}_A(n) = \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{\substack{v \text{ Blatt} \\ \text{in } T_A}} h(v)}_{=:\, H(T_A)} \quad \text{Blätterhöhensumme}$$

Suchen untere Schranken für $h(T)$, $H(T)$ für Bäume mit $n!$ Blättern

dies liefert untere Schranken für $C_A(n)$, $\overline{C}_A(n)$

Lemma: Sei T binärer Baum mit b Blättern. Dann gilt

a) $h(T) \geq \log b$

b) $H(T) \geq b \log b$

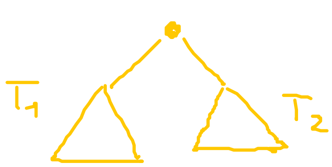
Beweis durch Induktion nach Höhe h von T

a) Ind. Anf.: $h = 0$

T • $\quad h(T) = 0 \quad \log(1) = 0$ ✓

$b = 1$

Schluss auf Höhe h



$b = b_1 + b_2$

o.B.d.A. $b_1 \geq b_2$ ($b_2 = 0$ möglich)

b_1 Blätter $\quad$ b_2 Blätter

$$
\begin{aligned}
h(T) &= 1 + \max\{h(T_1), h(T_2)\} \\
&\geq 1 + h(T_1) \\
&\overset{IV}{\geq} 1 + \log b_1 = \log 2 + \log b_1 \\
&= \log(\underbrace{2 \cdot b_1}_{\geq b}) \geq \log b
\end{aligned}
$$

zu b) $\quad$ zu zeigen $H(T) \geq b \cdot \log b$

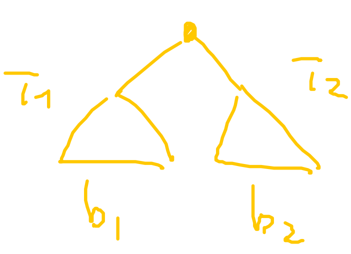
Ind. Anf: $h = 0$

T $\bullet$ $\quad H(T) = 0 \quad b \cdot \log b = 1 \cdot \log 1 = 0$

$b = 1$

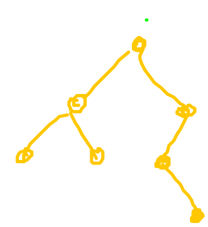
Ind. Schluss auf h

$$H(T) = H(T_1) + H(T_2) + b \qquad H(T) = 7$$



$b = b_1 + b_2$

$H(T_1) = 2$



$H(T_2) = 2$

Also $\quad H(T) = b + H(T_1) + H(T_2)$

$$\overset{IV}{\geq} b + b_1 \log b_1 + b_2 \cdot \log b_2$$

$$= b + \underbrace{b_1 \log b_1 + (b-b_1) \log (b-b_1)}$$

Kennen nicht den Wert von b_1
(kann variieren)

daher $\underbrace{\qquad}$ als Funktion

$$x \log x + (b-x) \log (b-x) =: f(x)$$

auffassen, und ihr Minimum
auf $[1, b]$ suchen

Kurvendiskussion: $f(x)$ nimmt Minimum bei $b/2$ an

$$\Rightarrow H(T) \geq b + \min_{x \in [1,b]} \left(x \log x + (b-x) \log (b-x) \right)$$

$$= b + \frac{b}{2} \log \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \log \frac{b}{2}$$

$$= b + b \log \frac{b}{2} = b + b \cdot (\log b - \log 2)$$

$$= b + b \log b + b(-1) = b \log b \quad \square$$

Jetzt $C_A(n)$ und $\overline{C}_A(n)$ abschätzen:

$$C_A(n) = h(T_A) \overset{\text{Lemma}}{\geq} \log n!$$

$$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)} \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Hälfte der Terme

$$\geq \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots\lceil n/2 \rceil}_{\lfloor n/2 \rfloor + 1 \text{ Faktoren}}$$

$8! = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{5 \text{ Faktoren}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$7! = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{4 \text{ Fak}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\geq \lceil n/2 \rceil^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}$$

$$n! \geq (n/2)^{n/2}$$

grobe Abschätzung

feiner: $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n + o(1/12n)}$

Stirlingsche Formel

$$C_A(n) \geq \log n! \geq \log (n/2)^{n/2} = \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{3} \log n + \underbrace{\frac{n}{6} \log n - \frac{n}{2}}_{\geq 0 \text{ für } n \geq 8}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{3}}_{c} n \log n \quad \text{für } n \geq \underbrace{8}_{n_0}$$

$$\in \Omega(n \log n)$$

Mittel:

$$\overline{C}_A(n) = \frac{1}{n!} H(T_A) \overset{\text{Lemma}}{\geq} \frac{1}{n!}\, n! \log n! = \log n!$$

$$\in \Omega(n \log n)$$

Folgerung: Mergesort, Heapsort sind $\Theta(n \log n)$ im Mittel und im Worst Case

Quicksort ist $\Theta(n \log n)$ im Mittel

offene Fragen: Was ist, wenn Voraussetzungen abgeschwächt werden

- deterministisch

  immer noch $\Omega(n \log n)$

- beruht auf paarweisen Vergleichen

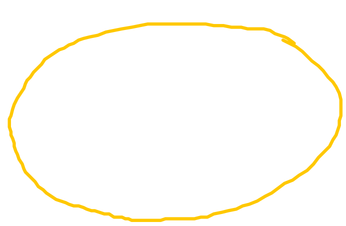
  kann schneller werden   Bucketsort

  braucht Info über Schlüsselmenge

anderer Zugang zur unteren Schranke

anfangs: alle Permutationen des Eingabearrays sind möglich

Π



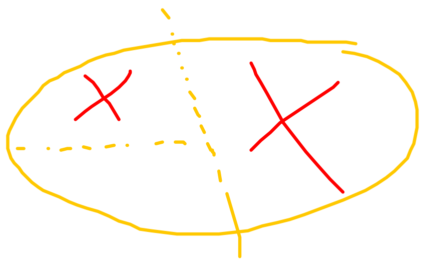
$|\Pi| = n!$

jede Vergleich zerlegt Π in $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$

Permutationen die verträglich mit Vergleich sind

unverträglich mit Vergleich

Setze $\Pi := \Pi_+$
und mache weiter



Zum Schluss muss $|\Pi| = 1$ sein

$\Rightarrow$ # Vergleiche $\geq \log(|\Pi|) = \log n!$

Kapitel 12 Zahlendarstellungen

am Skript erläutert

b-adische Zahldarstellung

jede Zahl $z \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq z \leq b^n - 1$ kann eindeutig als Wort der Länge n über $\Sigma_b = \{0, 1, \dots, b-1\}$ dargestellt werden gemäß

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot b^i \quad \text{mit } z_i \in \Sigma_b$$

Schreibweise $z = (z_{n-1}, z_{n-2}, \dots z_0)_b$

Beispiel $b = 10$

$$z = 1024 = 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3$$

$$z = (1024)_{10}$$

$$1024 = 4 + 102 \cdot 10$$

$$z_0 = z \text{ MOD } b + (\underbrace{z \text{ DIV } b}_{z'}) \cdot b$$

$$z_1 = z' \text{ MOD } b$$

364 bzgl $b = 2$

$$(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)_2$$

364 mod 2 = 0
364 div 2 = 182

182 mod 2 = 0
182 div 2 = 91

91 mod 2 = 1
91 div 2 = 45

45 mod 2 = 1
45 div 2 = 22

22 mod 2 = 0
22 div 2 = 11

11 mod 2 = 1
11 div 2 = 5

5 mod 2 = 1
5 div 2 = 2

2 mod 2 = 0
2 div 2 = 1

Komplementdarstellungen

b-adisch

(b-1) Komplement : Ziffernweise zu b-1 komplementieren

$K_9((1273)_{10}) \longrightarrow (8726)_{10}$ $\qquad (8727)_{10}$

$K_1((0110)_2) \longrightarrow (1001)_2$ $\qquad (1010)_2$

b-Komplement : (b-1) Komplement + 1

$K_b(x) + x = b^n$ bei n Stellen

$(1273)_{10} + (8727)_{10} = 10.000 = 10^5$