Für eine differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt in erster Näherung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + Df(x)(\tilde{x} - x)$$

Das fehlenden Restglied ist bei einmal stetig differenzierbarem f in der Größenordnung $o(\|\tilde{x}-x\|)$, bei zweimal stetig differenzierbarem f sogar $\mathcal{O}(\|\tilde{x}-x\|^2)$ und damit für kleine Eingangsstörungen $\|\tilde{x}-x\|$ vernachlässigbar.

Je nachdem, ob man relative Fehler im Ergebnis und/oder in den Eingangsdaten komponentenweise oder normweise betrachtet, erhalten wir folgende Varianten.

$$\text{(V0)} \qquad \begin{pmatrix} \frac{f_1(\tilde{x})-f_1(x)}{f_1(x)} \\ \vdots \\ \frac{f_m(\tilde{x})-f_m(x)}{f_m(x)} \end{pmatrix} \doteq K_0 \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_1-x_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{x}_n-x_n}{x_n} \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\text{(V1)} \qquad \begin{pmatrix} \frac{f_1(\tilde{x})-f_1(x)}{\|f(x)\|} \\ \vdots \\ \frac{f_m(\tilde{x})-f_m(x)}{\|f(x)\|} \end{pmatrix} \doteq K_1 \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_1-x_1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{x}_n-x_n}{x_n} \end{pmatrix}$$

und

$$\text{(V2)} \qquad \begin{pmatrix} \frac{f_1(\tilde{x})-f_1(x)}{\|f(x)\|} \\ \vdots \\ \frac{f_m(\tilde{x})-f_m(x)}{\|f(x)\|} \end{pmatrix} \doteq K_2 \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_1-x_1}{\|x\|} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{x}_n-x_n}{\|x\|} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Matrizen wie folgt definiert

$$K_0 = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f_i(x)} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$K_1 = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{\|f(x)\|} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$K_2 = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \cdot Df(x).$$

Die Frage, welchen der drei Ansätze man verwendet hängt davon ab, welche relative Fehler man vergleichen will.

(V0) hat für $m > 1$ den NACHTEIL, dass man je nach Problemstellung "wissen" muss, dass alle Komponenten des Ergebnisses wirklich von Null verschieden sind. Dies könnte PROBLEMATISCH sein. Bei den Eingangsdaten x können wir das einfach voraussetzen.

(V1) hat gegenüber (V2) den klaren Vorteil, dass die Einträge von $|K_1|$ nicht größer sind als die von $|K_2|$. Damit erlaubt (V1) bessere und schärfere Abschätzungen als (V2).

Durch Übergang zur Norm unter Ausnutzung der Submultiplikativität der Matrixnorm erhalten wir aus (V0-2):

$$\text{(N0)} \qquad \max_{i=1,\dots,m} \left| \frac{f_i(\tilde{x}) - f_i(x)}{f_i(x)} \right| \dot{\leqslant} \kappa_0 \max_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

bzw.

$$\text{(N1)} \qquad \frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|_\infty}{\|f(x)\|_\infty} \dot{\leqslant} \kappa_1 \max_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

und

$$\text{(N2)} \qquad \frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \dot{\leqslant} \kappa_2 \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}.$$

Dabei sind

$$\kappa_0 \leqslant \|K_0\|_\infty, \ \kappa_1 \leqslant \|K_1\|_\infty, \ \kappa_2 = \|K_2\| = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \|Df(x)\|.$$

κ_1 aus (N1) bezeichnet man als die *komponentenweise (relative) Kondition* von f,
κ_2 aus (N2) heißt *normweise (relative) Kondition* von f.

Wir können (N1) und (N2) auch als allgemeine Definition zur komponenten– und normweisen Kondition heranziehen, sofern f nicht differenzierbar ist.