TU Berlin
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser

WS 2004/2005

Ausgabewoche: 10.01.–14.01.
Abgabewoche: 17.01.–21.01.(Theorie)
07.02.–11.02.(Programme 7-9)

10. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/

Der QR–Algorithmus

---

1. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geqslant n$. Zeigen Sie, dass es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m,m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n,n}$ gibt, so dass $U^\top AV = B = \begin{pmatrix} \diagdown\!\!\diagdown \end{pmatrix}$ eine Bididiagonalmatrix ist, d.h. $b_{ij} = 0$ für alle $i > j$ oder $j > i+1$. Geben Sie dazu einen Algorithmus an, der B durch eine Folge von Householdertransformationen berechnet. 4 Punkte

2. Sei $G = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$.

   (a) Zeigen Sie: zu gegebenen $v = \binom{v_1}{v_2} \neq 0$ bewirkt die Wahl
   $$c = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \ s = \frac{-v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$
   dass G orthogonal und $Gv = \binom{*}{0}$ ist (dies bezeichnet man als Givens–Rotation).

   (b) Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einer oberen Hessenbergmatrix A eine QR–Zerlegung mit Hilfe von Givens–Rotationen berechnet. Wie teuer ist dieser Algorithmus ohne explizite Berechnung von Q?

   4 Punkte

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine nichtzerfallende obere Hessenbergmatrix (d.h. $a_{i+1,i} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$) und $\mu \in \mathbb{R}$. Zeige:

   (a) Falls $A - \mu I = QR$ eine QR–Zerlegung von $A - \mu I$ ist, dann ist Q eine obere Hessenbergmatrix (d.h. $q_{ij} = 0, i > j+1$). Ist μ ein Eigenwert von A, dann ist $r_{nn} = 0$.

   (b) $H = Q^\top AQ$ ist eine obere Hessenbergmatrix. Ist μ ein Eigenwert von A, dann ist $h_{n,n-1} = 0$.

   (c) Sei jetzt $\mu \in \mathbb{C}$. Dann ist $(A - \mu I)(A - \bar{\mu} I)$ trotzdem reell.

   (d) Sei $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $QR = A^2 - 2\alpha A + (\alpha^2 + \beta^2)I$ eine QR–Zerlegung. Dann ist $\begin{pmatrix} r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\ 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$ singulär.

   4 Punkte

P8 Schreibe ein **MATLAB**–Programm für die Reduktion auf obere Hessenberggestalt mittels Householder–Transformationen. Vergleiche das Programm bezüglich Genauigkeit und Rechenaufwand mit der **MATLAB**–Routine 'hess' anhand zufällig erzeugter Beispiele der Dimensionen $n = 10, 20, \ldots, 100$.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.