

11. Übungsblatt

„Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

Die QR-Iteration, Interpolation

1. Auf dem Raum P_n der reellen Polynome p vom Grad $\deg p \leq n$ sei ein Skalarprodukt der Form $\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t)\omega(t) dt$ mit einer festen positiven Gewichtsfunktion $\omega(t)$ gegeben. Zeigen Sie: Durch das Orthogonalisierungsverfahren von Gram–Schmidt angewandt auf die Monome $1, t, t^2, t^3, \dots$ lassen sich Polynome $p_n \in P_n, n = 0, 1, 2, \dots$ gewinnen mit höchstem Koeffizienten 1 und $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ für $n \neq m$. Diese Polynome genügen der Drei-Term-Rekursion $p_0(t) = 1, p_1(t) = t - \delta_1$ und

$$p_{n+1}(t) = (t - \delta_{n+1})p_n(t) - \gamma_{n+1}^2 p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\text{mit } \delta_{n+1} = \frac{\langle tp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}, \quad \gamma_{n+1}^2 = \frac{\langle p_{n+1}, p_{n+1} \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Hinweis. Zu gegebenen Vektoren v_1, \dots, v_m konstruiert das Verfahren sukzessive orthogonale q_1, \dots, q_m via $q_k \leftarrow v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle q_i, v_k \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle} q_i, k = 1, \dots, m$) 4 Punkte

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige, dass genau ein Polynom p dritten Grades existiert, das für vorgegebene Werte $f_1, s_1, f_2, s_2 \in \mathbb{R}$ die Interpolationsaufgabe

$$p(a) = f_1, p'(a) = s_1, p(b) = f_2, p'(b) = s_2$$

erfüllt ('Hermite-Interpolierende').

4 Punkte

3. Seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass V (Vandermonde-Matrix) invertierbar ist genau dann, wenn x_0, \dots, x_n paarweise verschieden sind. 4 Punkte

- P9** Zu einer gegebenen reellen symmetrischen tridiagonalen Matrix schreiben Sie einen MATLAB-Algorithmus, der den impliziten QR-Einzelshift umsetzt.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.