

12. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

Interpolation

1. Gegeben sei die Funktion $f(t) = 1 - (t - 1)^4$.

- (a) Bestimmen Sie den Fehler zwischen $f(t)$ und dem Interpolationspolynom p vom Grade 2 im Intervall $[0, 2]$ zu den Stützstellen

k	0	1	2
t_k	0	1	2
f_k	0	1	0

mit Hilfe der Fehlerabschätzung der Vorlesung.

- (b) Vergleichen Sie die Werte der Fehlerabschätzung mit den tatsächlichen Werten für $t = \frac{1}{2}$ und $t = 3$.

4 Punkte

2. (a) Es sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < b - a < \infty$) beliebig oft differenzierbar und es gebe ein $M > 0$, so daß $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$ für alle $x \in]a, b[$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Weiter sei eine Folge $x_k \in]a, b[$, $k = 0, 1, 2, \dots$ gegeben mit $x_i \neq x_j$, falls $i \neq j$.

Zeigen Sie, daß die Folge der interpolierenden Polynome $p_n \in P_n$ mit $p_n(x_k) = f(x_k)$ für $k = 0, \dots, n$ auf $]a, b[$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

- (b) In einem Beispiel der Vorlesung wurde die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in n äquidistanten Stützstellen durch Polynome interpoliert. Die Folge dieser interpolierenden Polynome schien nicht gegen f zu konvergieren. Ist diese Beobachtung mit (a) zu vereinbaren?

4 Punkte

3. Für eine stetige Funktion f auf $[-1, 1]$ sei $\|f\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|$. Die *Tschebyscheff-Polynome* T_n sind definiert durch

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t).$$

- (a) Zeigen Sie, daß $T_{n+1}(t) = 2^n t^{n+1} + \mathcal{O}(t^n) \in P_{n+1}$ und $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ für $|t| \leq 1$.
(b) Bestimmen Sie die Extremal- und Nullstellen von $T_{n+1}(t)$ im Intervall $[-1, 1]$.
(c) Es sei $p(t) = 2^n t^{n+1} + \mathcal{O}(t^n) \in P_{n+1}$. Zeigen Sie, dass aus $\|p\| \leq 1$ folgt $p = T_{n+1}$.
Hinweis: Wie oft schneiden sich p und T_n ?
(d) Zeigen Sie, dass für $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in [-1, 1]$ die Ungleichung

$$\|(\bullet - t_0) \cdots (\bullet - t_n)\| \geq \frac{1}{2^n}$$

gilt und das Minimum für die Nullstellen von T_{n+1} angenommen wird.

4 Punkte

P10 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Berechnung des Interpolationspolynoms in der Newton-Darstellung und vergleichen Sie das Verfahren bezüglich Effizienz und Genauigkeit mit dem Schema von Neville/Aitken anhand der gegebenen Beispiele.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.