

13. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

Spline-Interpolation

1. Seien $t_{-3} < t_{-2} < \dots < t_{n+2} < t_{n+3}$ und $t_{i+1} - t_i = h$ für alle $i = -3, \dots, n+2$. Definiere für $i = -1, \dots, n+1$ die Funktion

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3 & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}) \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3 & t \in [t_{i-1}, t_i) \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ (t_{i+2} - t)^3 & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige:

- $B_i(t)$ ist zweimal stetig differenzierbar.
- Skizziere $B_i(t)$.
- Betrachte für $p(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(t)$ und Funktionswerte f_0, \dots, f_n die Interpolationsaufgabe $p(t_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, $p''(t_0) = 0 = p''(t_n)$. Lässt sich die Aufgabe eindeutig lösen und wenn ja, wie teuer ist die Berechnung von a_0, \dots, a_n ? Wie teuer ist die Auswertung von $p(x)$ bei gegebenen a_0, \dots, a_n ?
- Was ändert sich bei der abgewandelten Aufgabe $p(t_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, $p'(t_0) = f'_0$, $p'(t_n) = f'_n$ bei zusätzlichen Funktionswerten f'_0, f'_n ?

4 Punkte

2. Gegeben seien die Stützstellen $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b \in \mathbb{R}$ sowie eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$. Bezeichne mit $\|f\| = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ die zugehörige Maximumsnorm sowie $h = \max_{i=1, \dots, n} |t_i - t_{i-1}|$.

- Betrachte die zugehörige stückweise linear Interpolierende $S(t)$, d.h. $S(t_i) = f(t_i)$, $i = 0, \dots, n$. Zeige

$$\|f - S\| \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|.$$

- Betrachte jetzt die zugehörige stückweise kubisch Interpolierende $H(t)$, d.h. $H(t_i) = f(t_i)$, $H'(t_i) = f'(t_i)$, $i = 0, \dots, n$. Zeige

$$\|f - H\| \leq \frac{h^4}{384} \|f'''\|.$$

Wo liegt das Problem, wenn man das Resultat auf kubische Splines übertragen möchte?

4 Punkte

3. Zeigen Sie, dass bei den drei Systemen der Spline-Interpolation (vollständig/natürlich/periodisch) der Gauß-Algorithmus MIT partieller Pivotisierung identisch ist mit dem Algorithmus OHNE Pivotisierung. Bekommt man neben den bereits existierenden Nichtnulleinträgen weitere Einträge bei der Elimination? Wenn ja, bei welchem System und wo liegen diese Einträge?

Tipp: Vergleiche Übungsblatt 2.

4 Punkte

P11 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm zur Berechnung der vollständig interpolierenden Spline-Funktion zu einer gegebenen Funktion sowie der natürlich interpolierenden Spline-Funktion zu gegebenen Daten. Vergleichen Sie das Verfahren bezüglich Effizienz und Genauigkeit mit der Polynominterpolation anhand der gegebenen Beispiele.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.