TU Berlin **WS 2004/2005**
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser

Ausgabewoche: 07.02.–11.02.
Abgabe, Theorie Blatt 13: 15.02. Tutorium
Theorie Blatt 14: 24.02. 12:00
P7 -P9 : bis 18.02.
P10-P11: bis 26.02.

14. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/

Quadratur

---

1. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.
   a) Sei F Stammfunktion zu f, d.h. $F' = f$. Seien $x, h \in \mathbb{R}$ mit $[x-h, x+h] \subseteq [a,b]$. Zeige:
   $$F(x + \frac{h}{2}) - F(x - \frac{h}{2}) = hf(x) + \frac{h^3}{24}\,\frac{f''(\theta_+) + f''(\theta_-)}{2}$$
   für geeignet zu wählende $\theta_+, \theta_- \in [a,b]$.
   b) Zeige: Sei $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \theta_1, \ldots, \theta_l \in [a,b]$. Dann existiert ein $\theta \in [a,b]$, so daß
   $$f''(\theta) = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} f''(\theta_k)$$
   ist.
   c) Sei $z_i = a + ih,\ i = 0, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$. Zeige:
   $$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(t)\,dt - hf(\frac{z_i + z_{i+1}}{2}) = \frac{h^3}{24} f''(\theta_i)$$
   für ein geeignetes $\theta_i \in [a,b], i = 0, \ldots, N-1$.
   d) Sei $M(h) = h\sum_{i=0}^{N-1} f(\frac{z_i + z_{i+1}}{2})$. (Summierte Mittelpunktregel) Zeige:
   $$\int_a^b f(t)\,dt - M(h) = (b-a)\frac{h^2}{24} f''(\theta),$$
   wobei $\theta \in [a,b]$ geeignet zu wählen ist.

   4 Punkte

2. Zu einer gegebenen stetigen Funktion $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ betrachte folgende Quadraturformel
   $$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx \approx p(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + p(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$
   Zeige: Die Formel ist für Polynome p vom Grade höchstens 3 exakt.
   Tipp: Zerlege p als $p(x) = L(x)q(x) + r(x)$, wobei $L(x)$ ein quadratisches Polynom ist, welches $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ als Nullstelle hat und r ein höchstens lineares Polynom ist.

   4 Punkte

3. Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ sowie Stützstellen $t_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, wobei $h = (b-a)/n$.
   (a) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b t(t)\ dt$ basierend auf der stückweise Hermite–Interpolierenden (d.h. stückweise Polynom dritten Grades zur Vorgabe von $f(t_i)$, $f'(t_i)$).
   (b) Konstruieren Sie eine Quadraturformel für $\int_a^b t(t)\ dt$ basierend auf vollständiger kubischer Spline–Interpolation. Was stellen Sie fest?

   4 Punkte