

## 2. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

### Der Gauß-Algorithmus für allgemeine und sym. pos. def. Matrizen

---

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

- Berechnen Sie die  $LU$  Zerlegung der Matrix  $A$ .
- Geben Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix  $A$  an.
- Welche Beziehung besteht zwischen den Faktoren aus der  $LU$ -Zerlegung und denen der Cholesky-Zerlegung?

4 Punkte

2. Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  heißt strikt diagonaldominant, wenn für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|.$$

Zeigen Sie, dass eine diagonaldominante Matrix eine  $LU$ -Zerlegung besitzt.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Restmatrix wieder diagonaldominant ist.

4 Punkte

3. Gegeben seien eine nichtsinguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und ein Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$ .

- Es sei eine  $LU$ -Zerlegung  $A^2 = LU$  bekannt. Wie kann diese ausgenutzt werden, um das Gleichungssystem  $Ax = b$  in  $O(n^2)$  Schritten zu lösen?
- Folgt aus der Existenz der  $LU$ -Zerlegung  $A^2 = LU$  (ohne Permutationsmatrix) stets die Existenz der  $LU$ -Zerlegung  $A = \tilde{L}\tilde{U}$  von  $A$  (ebenfalls ohne Permutationsmatrix)?

4 Punkte

**P1** Vergleiche folgende beiden Verfahren in **MATLAB** zur Lösung von  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Messe die Rechenzeit für  $n = 10, 50, 100$  und gegebene  $A, b$ .

- den `'\'` aus **MATLAB**. (Hinter diesem steckt der Gauß-Alg.)
- Einen selbstgeschriebenen Gauß-Algorithmus entsprechend der Vorlesung mit Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.