

4. Übungsblatt

„Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

Kondition, Stabilität, Vorwärts- und Rückwärtsanalyse

1. Ersetzen Sie die folgenden Ausdrücke durch mathematisch äquivalente Ausdrücke, in denen bei Gleitkommaarithmetik keine Auslöschung durch Subtraktion auftritt.

(a) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}, \quad |x| \ll 1,$

(b) $\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}, \quad |x| \gg 1,$

4 Punkte

2. Machen Sie eine Vorwärts- und eine Rückwärtsanalyse für die Berechnung des Skalarproduktes

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Dabei soll das Skalarprodukt numerisch durch das übliche naive Ausrechnen gebildet werden.

4 Punkte

3. Eine Norm $\|\cdot\|$ in einem Vektorraum V ist eine Abbildung von V nach \mathbb{R}_+ mit folgenden Eigenschaften. $\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0$, (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Sei jetzt $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

- (a) Durch

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

wird eine Norm auf dem Raum der $n \times n$ -Matrizen definiert.

(b) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $\|Ax\|_1 \leq (\max \Sigma \dots) \|x\|_1$ und konstruieren Sie dann ein x für welches Gleichheit gilt.

- (c) Ist $B \in \mathbb{R}^{n,n}$, so gilt für die Norm aus Teil 3a: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

6 Punkte