TU Berlin **WS 2004/2005**
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser Ausgabewoche: 22.11.–26.11.
Abgabewoche: 29.11.–03.12.(Theorie)
29.11.–03.12.(Programme 1-3)

5. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/

Kleinste Fehlerquadrate

---

1. Im folgenden seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \operatorname{rank} A = n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

   Bestimmen Sie den Gradienten der Abbildung $x \mapsto \|b - Ax\|_2^2$ und leiten Sie damit die Normalengleichung zur Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems her.

   4 Punkte

2. Im folgenden seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \operatorname{rank} A = n,\ \operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\|A\|_2}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|_2}$.

   Zeigen Sie:

   (a) $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_n}$, wobei $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n^2 > 0$ die Eigenwerte von A^TA sind.

   Hinweis: A^TA symmetrisch und positiv definit. Die Wurzeln $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n > 0$ heißen auch *Singulärwerte von A*.

   (b) $\operatorname{cond}_2(A^TA) = \operatorname{cond}_2(A)^2$.

   4 Punkte

3. Zeige: Ist eine orthogonale Matrix gleichzeitig eine obere Dreiecksmatrix, dann ist sie bereits diagonal. Wie sehen die Diagonaleinträge aus? Gilt ein analoges Ergebnis auch für unitäre Matrizen? 4 Punkte

P3 Der Anhalteweg a eines Autos wird üblicherweise definiert als die Summe aus Reaktionsweg r und Bremsweg b. Man modelliert $a = r + b = t_s v + \frac{v^2}{2\mu g}$, wobei v die Geschwindigkeit ist, t_s die Schreckzeit, $\mu \leqslant 1$ der Gleitreibungskoeffizient und $g \approx 10\text{m/s}^2$ die Gravitationskonstante. Zur Bestimmung von t_s und μ wurden gemessen:

v in km/h	30	40	50	60	70	80	90	100
a in m	15	20	25	30	45	50	60	80

Geben Sie ein lineares Ausgleichsproblem für die Parameter $1/\mu$ und t_s an. Lösen Sie das Ausgleichsproblem in MATLAB unter Verwendung der Normalengleichung.

Z **Zusatzaufgabe** (freiwillig ohne Wertung). Von der Homepage der Vorlesung laden Sie sich das Programm `pivotgolf.m` herunter. Machen Sie sich mit der Bedienung des Programms vertraut und versuchen Sie beim Golf-Turnier die Punktzahl der totalen Pivotisierung zu schlagen.