TU Berlin **WS 2004/2005**
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser

Ausgabewoche: 29.11.–03.12.
Abgabewoche: 06.12.–10.12.(Theorie)
10.01.–14.01.(Programme 4-6)

6. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/

Die QR–Zerlegung

---

1. Gegeben sei $b \in \mathbb{R}^m$, eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \leqslant n$ und $\operatorname{rang} A = m$. Wie kann man sich die QR–Zerlegung zunutze machen, um eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 = \min!$ zu bestimmen. Wie groß ist in diesem Falle die Norm des Residuum $b - Ax$? 4 Punkte

2. Gegeben seien n linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das klassiche Verfahren von Gram–Schmidt zur Erzeugung von n orthonormalen Vektoren $q_1, \ldots, q_n$:

   for $k = 1, \ldots, n$
   $$z_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i \; (q_i^\top a_k), \qquad q_k = z_k / \|z_k\|_2$$
   end

   Zeigen Sie, dass man dieses Verfahren als QR–Zerlegung $A = QR$, angewendet auf die Spalten von $A = [a_1, \ldots, a_n]$ interpretieren kann. Dabei ist $Q \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine Matrix mit orthonormale Spalten und $R \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine obere Dreiecksmatrix. Geben Sie Q und R explizit an! 4 Punkte

3. Zeige:

   (a) Für jedes $V \in \mathbb{R}^{n,m}$, Rang $V = m$ ist $S = I - 2V(V^TV)^{-1}V^T$ symmetrisch und orthogonal und es ist $S^2 = I$.

   (b) S ist eine Spiegelung am orthogonalen Komplement von Bild V.

   (c) S hat nur Eigenwerte -1 m–fach, 1 $n - m$–fach.

   (d) $P = I - V(V^TV)^{-1}V^T$ ist symmetrisch und erfüllt $P^2 = P$.

   (e) P ist eine Projektion auf das orthogonalen Komplement von Bild V.

   (f) P hat nur Eigenwerte 0 m–fach, 1 $n - m$–fach.

   6 Punkte

P4 Schreibe einen **MATLAB**–Algorithmus zur Berechnung der QR–Zerlegung mittels Householder–Transformationen.
Vergleiche den Algorithmus bezüglich Rechengenauigkeit und Rechenzeit mit der Funktion 'qr' aus **MATLAB** sowie der Cholesky-Zerlegung für die Normalengleichung.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.