TU Berlin **WS 2004/2005**
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser

Ausgabewoche: 06.12.–10.12.
Abgabewoche: 13.12.–17.12.(Theorie)
10.01.–14.01.(Programme 4-6)

7. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

`http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/`

Nichtlineare Gleichungen

---

1. Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \phi(x)$, wobei $x = (\xi, \eta, \zeta)^\top$ mit

$$\phi(x) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\zeta + 3 \\ \sin(\pi\xi) + \frac{1}{1+\eta} \\ \ln(1 + \eta^2 + \zeta^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Würfel $I = [0,1] \times [0,1] \times [-1,1]$. Zeige:

(a)
$$D\phi(x) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} e^{-\eta^2} + \zeta & -2\eta\xi e^{-\eta^2} & \xi \\ \pi\cos(\pi\xi) & \frac{-1}{(1+\eta)^2} & 0 \\ 0 & \frac{2\eta}{1+\eta^2+\zeta^2} & \frac{2\zeta}{1+\eta^2+\zeta^2} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt für die Lipschitzkonstante $\alpha = 5/6$ bezüglich der Maximumnorm.

(c) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ mit Startwert $x^{(0)} = (1/2, 0, 0)^\top$. x^* bezeichne den Fixpunkt von ϕ in I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um
$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leqslant 10^{-3}$$
garantieren zu können?

6 Punkte

2. Zur Bestimmung der positiven Lösung $x_* > 0$ von $2x - \tan x = 0$ kann man die Fixpunktiterationen

(a) $x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan x_k$

(b) $x_{k+1} = \arctan(2x_k)$

betrachten. Analysieren Sie das Konvergenzverhalten gegen x_* und gegebenenfalls die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Folgen. 4 Punkte

3. Es seien $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \neq 0$. Gesucht ist $x > 0$, so daß $x^\alpha = a$.

(a) Geben Sie die Newton-Iteration zur Berechnung einer Nullstelle von $f(x) = x^\alpha - a$ an.

(b) Für welche Startwerte x_0 konvergiert die Newton-Folge aus Teil 3a?
Hinweis: Unterscheide die Fälle $\alpha \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha < 0$.

4 Punkte

P5 Schreibe ein **MATLAB**–Programm für das Fixpunktverfahren sowie das Newton–Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion. Wende die Verfahren auf die Funktion $e^x - \sin x$ an und vergleiche die Programme bezüglich Rechenaufwand und Genauigkeit angewandt auf die Fixpunktaufgaben

(a) $x = e^x - \sin x + x$

(b) $x = \sin x - e^x + x$

(c) $x = \arcsin e^x, x < 0$

(d) $x = \ln \sin x, x \in (0, \pi)$

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.