TU Berlin **WS 2004/2005**
Institut für Mathematik — MA 4-5
M. Bollhöfer, A. Zeiser

Ausgabewoche: 13.12.–17.12.
Abgabewoche: 03.01.–07.01.(Theorie)
10.01.–14.01.(Programme 4-6)

8. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/

Newton– und Gauß–Newton–Verfahren

---

1. Es sollen die Parameter a, b, c der Funktion $f(t) = a + b\sin(c + t)$ aus gegebenen Werten $f(t_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$ bestimmt werden.

   (a) Stellen Sie ein entsprechendes nichtlineares Gleichungssystem $F(a, b, c) = y \in \mathbb{R}^3$ auf.

   (b) Linearisieren Sie das Gleichungssystem aus Teil 1a.

   (c) Geben Sie die Newton-Iteration zur Lösung des Gleichungssystems an.

   3 Punkte

2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Die Abbildung $\Phi : D \to D$ sei stetig differenzierbar mit $|\Phi'(x)| \neq 1$ für alle $x \in D$ und besitze einen Fixpunkt x^*. Zeigen Sie, dass eine der beiden folgenden Fixpunktiterationen in einer Umgebung von x^* konvergiert.

$$x_{k+1} := \Phi(x_k), k = 0, 1, 2 \dots \qquad y_{k+1} = \Phi^{-1}(y_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

   4 Punkte

3. Gegeben sei ein stetig differenzierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit genau einer Nullstelle x^*.

   (a) Zu zwei Stützstellen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ geben Sie die interpolierende Gerade an und zeigen Sie, dass diese genau eine Nullstelle hat, sofern $f(a)f(b) < 0$ ist. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Geraden eine zum Newton–Verfahren ähnliche Iteration der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}, x^{(k-1)})$$

   zur Bestimmung der Nullstelle von f.

   (b) Sei $a < c < b$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$p(x) = f(a)\frac{x-c}{a-c} \cdot \frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-c}{b-c} + f(c)\frac{x-a}{c-a} \cdot \frac{x-b}{c-b}$$

   das eindeutige quadratische Polynom ist, welches durch die drei Stützstellen $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ und $(b, f(b))$ geht.

   (c) Zeigen Sie, dass p genau eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt, sofern $f(a)f(b) < 0$.

   (d) Konstruieren Sie mit Hilfe der Nullstelle y von p ein zum Newton–Verfahren ähnliches Verfahren der Form

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}, x^{(k-1)}, x^{(k-2)})$$

   zur Bestimmung der Nullstelle von f.

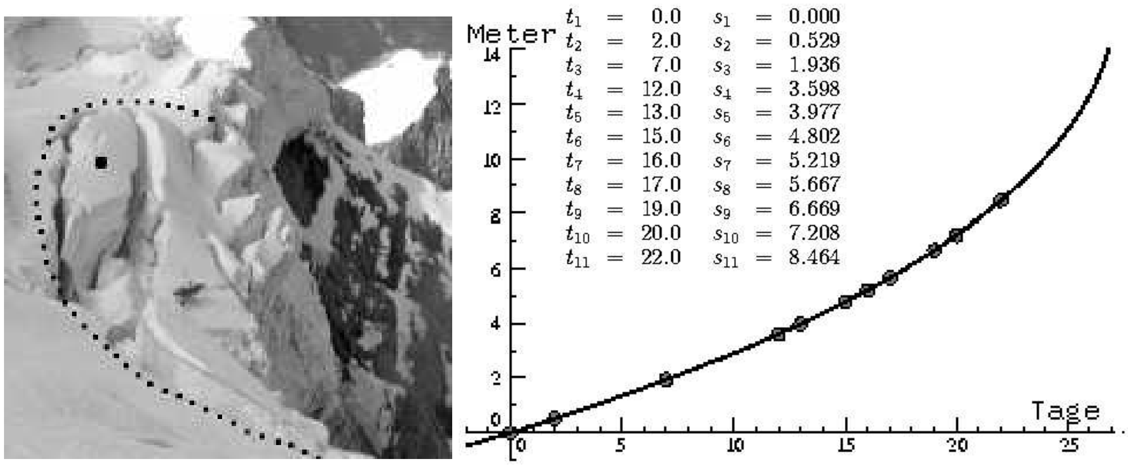
   4 Punkte

P6 Implementiere das mehrdimensionale Gauß–Newton–Verfahren in MATLAB und wende es auf die mitgelieferten Anwendungsprobleme an.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.

Aufgabe für die Großübung (Der hängende Gletscher von Grindelwald[1])

Im Sommer 1999 geriet ein hängender Gletscher hoch in den Bergen oberhalb von Grindelwald (Schweiz) in Bewegung und bedrohte die Gegend darunter durch einen gewaltigen Eissturz. Um Vorsichtsmaßnahmen zu treffen, war eine möglichst präzise Voraussage, wann dieser Eissturz stattfinden würde, notwendig. Wissenschaftler der ETH Zürich plazierten einen Meßstab auf dem Gletscher (siehe Abbildung) und maßen dessen Vorwärtsbewegung. Die gemessenen Daten (t in Tagen, s in Metern) sind in dem Diagramm angegeben. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem 18. Juli 1999, 7 Uhr morgens.



Frühere Erfahrungen mit Eisstürzen (insbesondere am Weißhorn) haben ergeben, daß die Geschwindigkeit der Eismasse gemäß der Formel

$$v(t) \quad = \quad v_0 + \frac{a_0}{(t_\infty - t)^n}$$

zunimmt, wobei t_∞ der Zeitpunkt des Absturzes ist und $n \approx \frac{1}{2}$. Die Parameter v_0 und a_0 hängen von den speziellen Eisverhältnissen ab.

1. Zeigen Sie, daß die Position $s(t)$ des Meßstabs nach diesem Modell der Gleichung

   $$s(t) \quad = \quad v_0 t + a_0 \left(\frac{(t_\infty - t)^{1-n} - t_\infty^{1-n}}{n-1} \right)$$

   genügt.

2. Formulieren Sie ein nichtlineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Parameter v_0, a_0 und t_∞ auf Grundlage der gemessenen Daten.

[1] nach A. Abdulle, G. Wanner, *200 years of least squares method*, Elem. Math. 57 (2002), pp. 45–60.

Aufgabe für das Tutorium

Einige Liter Punsch werden auf einem Herd bis zum Siedepunkt (ca. 96°C, d.h. politisch korrekt alkoholfrei) erhitzt. Nun wird der Punsch vom Herd genommen, und auf einem Stövchen weiter warm gehalten, vgl. Abb. Wegen der geringeren Heizleistung des Teelichts nimmt die Temperatur langsam ab. Um der allgemeinen Zufriedenheit willen ist eine möglichst präzise Vorhersage, wann der Punsch die richtige Trinktemperatur erreicht (zwischen 50°C und 60°C), wichtig. Wissenschaftler plazierten ein Thermometer in der Kanne und bestimmten (mit einer Uhr) jeweils die Zeit, wann das Thermometer die Werte 95°C, 90°C, 85°C, ..., 65°C anzeigt. Die gemessenen Daten (t in Minuten und Sekunden) finden Sie in der Tabelle.

Frühere Erfahrungen mit Punsch (und auch mit Glühwein) haben ergeben, daß beim Abkühlungsprozeß zwischen Zeit und Temperatur ein exponentieller Zusammenhang besteht. Formulieren Sie ein entsprechendes mathematisches Modell und bestimmen Sie die Modellparameter aus den gegebenen Daten, indem Sie ein geeignetes Ausgleichsproblem lösen. Ab wann etwa kann der Punsch getrunken werden? Welche minimale Temperatur wird der Punsch erreichen?

Temperatur $^\circ C$	Zeit t
96	$0''$
95	$30''$
90	$2'05''$
85	$3'45''$
80	$6'07''$
75	$8'55''$
70	$12'20''$
65	$16'30''$