

9. Übungsblatt „Einführung in die Numerische Mathematik“

<http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS04/EinfNumMat/>

Eigenwertprobleme, Vektoriteration

1. Betrachte die Rayleigh–Quotienten–Iteration. Zähle die Anzahl flops (Fließkommaoperationen) eines einzelnen Iterationsschrittes, falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

- (a) voll besetzt ist,
- (b) eine obere Hessenbergmatrix ist.

Zur Lösung des Gleichungssystems in Rayleigh–Quotienten–Iteration soll der Gauß–Algorithmus verwendet werden. 4 Punkte

2. Gegeben sei $h = \frac{1}{N+1}$ und die $N \times N$ –Matrix

$$T = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \\ -1 & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Ist $u^{(k)} = (\sin(k\pi h), \sin(k\pi 2h), \dots, \sin(k\pi N h))^T$ und $\lambda^{(k)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}$, dann gilt $Tu^{(k)} = \lambda^{(k)}u^{(k)}$, für alle $k \in \{1, \dots, N\}$.

Hinweis. Verwenden Sie (ohne Beweis) $2 \sin(\varphi) - \sin(\varphi + \psi) - \sin(\varphi - \psi) = 4 \sin^2 \frac{\psi}{2} \sin(\varphi)$. 4 Punkte

3. (a) Zeige den Satz von Gerschgorin: Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dann sind die Eigenwerte von A enthalten in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$\bigcup_{i=1}^n K_i, \quad K_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|\}.$$

- (b) Zeige folgende verschärfte Variante des Satzes von Gerschgorin: Sind i_1, \dots, i_r (paarweise verschieden) so gewählt, daß

$$\left(\bigcup_{k=1}^r K_{i_k} \right) \cap \left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, \dots, i_r}}^n K_i \right) = \emptyset,$$

dann enthält $\bigcup_{k=1}^r K_{i_k}$ bereits r (nicht zwingend verschiedene) Eigenwerte von A

Hinweis: Die Eigenwerte einer Matrix hängen stetig von den Koeffizienten der Matrix $A(\varepsilon)$ ab, wobei $a_{ii}(\varepsilon) = a_{ii}$ sowie für $i \neq j$, $a_{ij}(\varepsilon) = \varepsilon a_{ij}$.

4 Punkte

- P7** Schreibe MATLAB–Algorithmen zur Potenzmethode, zur inversen Iteration und zur Rayleigh–Quotienten–Iteration und untersuche die Algorithmen bzgl. ihrer Effizienz anhand der vorgegebenen Beispiele.

Zu dieser Aufgabe sind vorgefertigte Programme zu vervollständigen, siehe Homepage.