WS 2005/06 | Technische Universität Berlin
Prof. Dietmar Hömberg | Fakultät II
Daniela Kern | Institut für Mathematik

3. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgeben in der Vorlesung am 18.11.03)

1. (a) (2 Punkte) Berechnen Sie für $f(x, y, z) = xy^2 \sin z$ das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $\xi = (1, 2, 0)^T$.

   (b) (2 Punkte) Es seien $f(x_1, x_2) = x_1^2 \sin x_2$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (\cos t, t^3)^T$. Berechnen Sie $\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t))$.

2. (2 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine Rechtecksmatrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2.$$

   Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix positiv semidefinit und genau dann positiv definit ist, wenn A injektiv ist.

Der zweite Teil der Aufgaben behandelt konvexe Mengen und Funktionen. Diese spielen in der Optimierung eine wichtige Rolle.

3. (2 Punkte) Es ist zu beweisen: für eine konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die Niveaumengen konvex. Gilt auch die Umkehrung?

4. (a) (1 Punkt) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und konvex. Zeigen Sie:
   $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   (b) (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng konvex. Zeigen Sie:
   $\nabla f(x) = \nabla f(y) \Leftrightarrow x = y$.
   Welche Konsequenzen ergeben sich für die Optimierungsaufgabe $f(x) \to \min$?