WS 2005/06
Prof. Dietmar Hömberg
Daniela Kern

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

4. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 25.11.05)

1. (2 Punkte) Die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

sind in $x = 0$ nicht differenzierbar. Existiert dort eine Richtungsableitung? Wenn ja, wie sieht sie aus?

2. (3+4+1+1+3Z Punkte) Wir wollen folgendes Problem untersuchen:

In der Ebene ist ein Punkt x so zu bestimmen, dass die Summe der Abstände von x zu drei gegebenen Punkten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ minimal wird.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als Optimierungsaufgabe im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie die Existenz einer Lösung x^*. Ist diese eindeutig?

(b) Sei $x^* \neq x_i$, $i = 1 \ldots 3$. Finden Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung und geometrischer Überlegungen diesen Punkt x^* im Dreieck x_1, x_2, x_3. Zeigen Sie, dass dann alle Innenwinkel des Dreiecks x_1, x_2, x_3 kleiner als 120^o sind.

(c) Was ist, wenn einer dieser Innenwinkel $> 120^o$ wird?

(d) Finden Sie ein Beispiel, wo der gesuchte Punkt *nicht* mit dem Schwerpunkt übereinstimmt. Der Schwerpunkt minimiert die Summe der Quadrate der Abstände zu den drei gegebenen Punkten.

(Z) (*Diese Aufgabe ist nicht erforderlich für eine volle Punktzahl, erhaltene Punkte zählen zusätzlich zu den Punkten aus den **Programmieraufgaben**.*)
Lösen Sie das Problem mit einem Optimierungsverfahren Ihrer Wahl, z.B. Nelder-Mead, auf dem Computer für

(i) $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (0, 1)$, $x_3 = (1, 0)$,
(ii) $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (10, 1)$, $x_3 = (1, 0)$,
(iii) $x_1 = (0, 0)$, $x_2 = (0.5, \sqrt{3}/2)$, $x_3 = (1, 0)$.

(*Sie dürfen auch bereits vorhandene MATLAB-Funktionen verwenden.*)

3. (1+1+3) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion. Wir nehmen an, daß x^* ein lokales Minimum von f entlang jeder Geraden durch x^* ist. Das heißt, die Funktion

$$g_d(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$$

hat für jede Richtung $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein lokales Minimum bei $\alpha = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß gilt $\nabla f(x^*) = 0$.

(b) Es sei $\hat{x}$ ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, daß $\hat{x}$ ein lokales Minimum von f entlang jeder Geraden durch $\hat{x}$ ist.

(c) Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.
Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = (x_2 - p x_1^2)(x_2 - q x_1^2)$ mit $0 < p < q$. Zeigen Sie, daß $x^* = (0, 0)$ ein lokales Minimum entlang jeder Geraden durch x^* ist. Zeigen Sie, daß x^* *kein* lokales Minimum von f ist. Hinweis: Untersuchen Sie f an den Punkten (y, my^2) für $p < m < q$ und $y \neq 0$.

Abgabe der Programmieraufgaben: Die Programmieraufgaben werden in Zweiergruppen in MATLAB bearbeitet. Sie sind per email an Daniela Kern (`kern@wias-berlin.de`) zu schicken. Dabei sollen folgende Konventionen eingehalten werden:

- in der email steht Nummer der Übung und der Hausaufgabe, Datum, Namen der Bearbeiter
- die Programme werden an die email angehängt
- Namensgebung der Dateien: `nnnnn_u_a_fkt.*` wobei `n` Namenskürzel der Bearbeiter, `u` die Übungsnummer, `a` die Aufgabennummer, `fkt` der Funktionenname ist. Aus der email sollte hervorgehen, welche Funktion wie gestartet wird.
- Bitte nur lauffähige Programme schicken. Also die Funktionen vorher gründlich testen. Z.B. probieren, ob nach einem Matlab-Neustart alles noch funktioniert.
- Nicht vergessen, die zur Aufgabe gehörenden Fragen in der email zu beantworten.

Programmieraufgabe: (per email bis zum 2.12.05)

Implementieren Sie das Newtonverfahren. Das Verfahren soll als Funktion in Matlab realisiert werden, die mit

```
x=newtonverf(x0,fun,gradfun,hessfun)
```

aufgerufen werden soll. Dabei sei `x0`: der Startvektor, `fun, gradfun, hessfun`: Strings, die die zu optimierende Funktion f, den Gradienten ∇f bzw. die Hessematrix $\nabla^2 f$ bezeichnen.

Hinweis: Innerhalb der Funktion `newtonverf` kann nun mit

`y=feval(fun,x)`, `g=feval(gradfun,x)` bzw. `H=feval(hessfun,x)`

auf die Funktionen `fun`, `gradfun` bzw. `hessfun` zugegriffen werden.
Wenden Sie dieses Verfahren auf die folgenden Funktionen an:

1. Rosenbrock-Funktion,
2. (Beale) $f(x) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2$,
3. (Spellucci) $f(x) = 2x_1^3 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2 + 3$.

Versuchen Sie, ausgehend von verschiedenen Startwerten, lokale Extrema zu finden. Für welche Startwerte konvergiert das Verfahren gegen welche stationäre Punkte? (8 Punkte)