WS 2005/06
Prof. Dietmar Hömberg
Daniela Kern

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

5. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 2.12.05)

1. (3+3 Punkte) Wir untersuchen ein einfaches Gradientenabstiegsverfahren mit konstanter Schrittweite zur Lösung des Problems $min\, f(x)$. Für eine gegebene Lösung x^k wird die nächste Iterierte nach der Vorschrift $x^{k+1} = x^k - \sigma \nabla f(x^k)$ bestimmt. Dabei wird $\sigma > 0$ zu Beginn gewählt und dann unverändert gelassen.

   (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|^{3/2}$. Zeigen Sie, daß es kein L gibt, das die Lipschitzbedingung $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle x, y erfüllt. Beweisen Sie weiterhin, daß dieses Verfahren entweder nach *endlich* vielen Schritten das Optimum $x^* = 0$ erreicht, oder es nicht gegen x^* konvergiert.

   (b) Sei f nun definiert als $f(x) = \|x\|^{2+\beta}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen an, für welche Werte von σ und x_0 das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite σ konvergiert/divergiert.

2. (2 Punkte) Wir betrachten noch einmal das quadratische Optimierungsproblem

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T H x + b^T x + c \tag{1}$$

   mit symmetrischer und positiv definiter Matrix $H \in \mathbb{R}^{n,n}$. Es bezeichne x^* das Minimum von f. Wir definieren die Energienorm als $\|x\|_H := \left(x^T H\, x\right)^{1/2}$. Zeigen Sie:

   (a) $\|\cdot\|_H$ ist tatsächlich eine Norm.

   (b) Es gilt $f(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2 + f(x^*)$ bzw. $\|x - x^*\|_H^2 = 2\,[f(x) - f(x^*)]$.

3. (2 Punkte) Es sei f wie in Aufgabe 2.

   (a) Für $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$ gilt: $\nabla f(x) = \nabla E(x)$.

   (b) Man kann also anstatt von f auch die Funktion E betrachten. Für was ist E ein Maß?

4. (5 Punkte) Es sei $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$.

   (a) Zeigen Sie, daß für die Iterierten gilt:

$$E(x_{k+1}) \leq \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2 E(x_k) = \left(\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M}{m} + 1}\right)^2 E(x_k), \tag{2}$$

   wobei M bzw. m den größten bzw. kleinsten Eigenwert von H bezeichnet. Das Verhältnis $\kappa = M/m$ ist die Konditionszahl von H.
   Hinweise:

   - Schreiben Sie $E(x_k)$ in der Form $\frac{1}{2} g_k^T H^{-1} g_k$.
   - Benutzen Sie die *Ungleichung von Kantorovich*:

$$\frac{\|x\|_2^4}{\|x\|_H^2 \|x\|_{H^{-1}}^2} \quad \geq \quad \frac{4Mm}{(M + m)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

     Hier bezeichnet m bzw. M den kleinsten bzw. größten Eigenwert von H.

   (b) Bestimmen Sie aus der Ungleichung (2) eine Konstante C so, daß sich der Fehler $\|x_{k+1} - x^*\|_2$ abschätzen lässt als $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq C\,\|x_k - x^*\|_2$.