

## 6. Übung zur LV Nichtlineare Optimierung

**Theoretische Aufgaben: (Abgabe in der Vorlesung am 8.12.05)**

**Achtung: geändertes Abgabedatum, da die Vorlesung am 9.12.2005 ausfällt.**

1. (2+2 Punkte)

Im Variable-Metrik-Verfahren (VL, Abschnitt 4.7.1) löst man in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix  $A^{(k)}$ . Anstatt nun eine Update-Formel für  $A^{(k)}$  zu benutzen und das Gleichungssystem zu lösen, kann man natürlich auch versuchen, direkt eine Update-Formel für die Inverse von  $A^{(k)}$  herzuleiten.

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie:

- (a)  $A + uv^T$  ist genau dann regulär, wenn  $\sigma := 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$  ist.
- (b) Für  $\sigma \neq 0$  gilt die folgende Update-Formel für die Inverse, die sog. *Sherman-Morrison-Woodbury-Formel*:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \sigma^{-1} A^{-1} uv^T A^{-1}.$$

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit elementarer Kegeltheorie, die in der Theorie restringierter Optimierungsaufgaben eine wichtige Rolle spielt.

2. (2 Punkte)

Beweisen Sie: Ein Kegel  $K$  ist genau dann konvex, wenn  $K + K \subset K$  gilt.

3. (2 Punkte)

Sei  $C \subset \mathbb{R}^n$  konvex und  $x \in C$ . Zeigen Sie:

- (a) Der Normalenkegel  $N(C, x)$  ist abgeschlossen.
- (b) Aus  $x \in \text{int } C$  folgt  $N(C, x) = \{0\}$ .

4. (3 Punkte)

Sei  $K$  ein konvexer Kegel und  $K^*$  der duale oder Polarkegel zu  $K$ . Zeigen Sie:

- (a) Aus  $0 \in K$  folgt  $K^* = N(K, 0)$ .
- (b) Sind  $K_1, K_2$  konvexe Kegel mit  $K_1 \subset K_2$ , so folgt  $K_1^* \supset K_2^*$ .
- (c)  $K^*$  ist immer konvex und abgeschlossen.

**Programmieraufgabe: (per email bis zum 9.12.05)**

Programmieren Sie das inverse BFGS-Verfahren aus Aufgabe 2. Verwenden Sie das Powell-Verfahren zur Schrittweitsuche mit den Parametern  $\delta = 0.01$  und  $\beta = 0.9$ .

Wenden Sie das Verfahren auf die Funktionen vom 4. Übungsblatt (Rosenbrock, Beale, Spellucci) an.

Vergleichen Sie das Verhalten beider (Newton und BFGS+Powell) Verfahren. (8 Punkte)